目 次

第 1 章　複素数 **5**

1.1　虚数単位と複素数 5

1.1.1　虚数単位 5

1.1.2　複素数 5

1.1.3　複素数の計算法 6

1.1.4　実部と虚部 6

1.1.5　複素共役 7

1.1.6　絶対値 7

1.1.7　逆数と商 7

第 2 章　複素平面と関数のグラフ **9**

2.1　呼び方 9

2.2　複素数を表す点 9

2.3　作図 10

2.3.1　和と差 10

2.3.2　絶対値 11

2.3.3　三角不等式 11

2.3.4　偏角 11

2.4　Euler の公式 12

2.4.1　指数関数の公式 $\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2} = \mathrm{e}^{x_1+x_2}$ は複素数でも成り立つのか？ 14

2.4.2　三角関数の倍角・３倍角の公式 14

2.4.3　極座標表示 15

2.4.4　応用 15

2.5　複素関数とその表示 16

2.5.1　複素関数のグラフによる表示 17

第 3 章　数列と級数 **19**

3.1　数列 19

3.1.1　数列の極限 19

3.1.2　無限遠点 20

3.2　級数 20

3.3　整級数 21

3.3.1　収束半径の求め方 22

3.3.2　収束円周上の収束・発散 23

第 4 章　複素関数 **24**
4.1　複素関数の連続性 24
4.1.1　関数の極限値 24
4.1.2　関数の連続性 25
4.2　微分 26
4.2.1　Cauchy–Riemann の方程式 27
4.2.2　微分可能である十分条件 28
4.3　正則関数 29
4.3.1　正則点と特異点 29
4.3.2　正則関数の性質 29
4.3.3　極 30
4.3.4　合成関数 $f(g(z))$ 30
4.3.5　逆関数 30
4.3.6　等角写像 30
4.3.7　無限遠点での性質 32
4.4　整級数で表される関数 32
4.4.1　微分 33

第 5 章　初等関数 **34**
5.1　指数関数 34
5.1.1　指数関数の微分 34
5.1.2　指数関数の周期 34
5.1.3　その他の性質 35
5.2　三角関数 36
5.2.1　整級数による表現 37
5.2.2　周期 37
5.2.3　その他の性質 38
5.2.4　その他の三角関数 39
5.3　双曲線関数 40
5.4　対数関数 41
5.4.1　対数関数の性質 41
5.4.2　対数関数の微分 42
5.4.3　分岐点と Riemann 面 42
5.5　ベキ関数 43
5.5.1　ベキ関数の微分 43
5.5.2　ベキ関数の多価性 43

第 6 章　複素関数の積分 **45**
6.1　定積分 45
6.1.1　積分径路の分割と逆向き径路 46
6.1.2　定積分は径路による？ 47
6.2　Cauchy の積分定理 49
6.2.1　Cauchy の積分定理の証明 49
6.2.2　Cauchy の積分定理の応用 49

6.3 不定積分 . . . 50
6.4 極の周りの周回積分と留数 . . . 52
6.4.1 １位の極の周りの周回積分 . . . 52
6.4.2 ２位の極の周りの周回積分 . . . 53
6.5 留数定理 . . . 53
6.5.1 留数の求め方 . . . 55
6.6 Laurent 展開 . . . 55
6.7 留数定理の実関数積分への応用 . . . 56
6.7.1 例１ . . . 56
6.7.2 例２ . . . 57
6.7.3 例３ . . . 59
6.8 半円の追加に関する注意 . . . 61

第 7 章 解析接続 62

付 録 A 線形代数 65
A.1 ここでの書き方 . . . 65
A.2 行列やベクトルの和や積 . . . 66
A.2.1 ベクトルの内積 . . . 66
A.3 エルミート行列とユニタリー行列 . . . 66
A.3.1 エルミート共役 . . . 67
A.3.2 エルミート行列 . . . 67
A.3.3 行列の固有値と固有ベクトル（復習） . . . 68
A.3.4 エルミート行列の固有値の実数性 . . . 68
A.3.5 異なる固有値に属する固有ベクトルの直交性 . . . 69
A.3.6 同じ固有値に属する異なる固有ベクトルの直交化 . . . 69
A.3.7 $\boldsymbol{A}$ を対角化する行列 . . . 70
A.3.8 ユニタリー行列 . . . 71
A.3.9 ユニタリー行列の固有値と固有ベクトル . . . 71
A.3.10 固有ベクトルの直交性 . . . 72
A.3.11 同時対角化 . . . 72

この講義ノートについての質問は、坂井（sakai@spring8.or.jp　または sakai@sci.u-hyogo.ac.jp）までメールで送って下さい。

第1章　複素数

多分、高校でも習ったと思うが、複素数の定義から始めることにする。

1.1　虚数単位と複素数

1.1.1　虚数単位

実数は2乗すると必ず 0 以上である。したがって、実数でない別の数（**虚数**）を導入しないと数として完成しない。2乗して -1 になる数の**一方**を i と書いて**虚数単位**という。すなわち、$i^2=-1$ である。2乗して 4 になる数は 2 と -2 の2個ある。このうち、正の数を $\sqrt{4}$ という記号を用いる。このように2乗して a となる数は2個あると思うのが、数を拡張する上で自然な考え方である。したがって、2乗して -1 になる数の1方を i としたら、もう1方は $-i$ である。すなわち、$(-i)^2=-1$ である。$\pm i$ は、$z^2=-1$ の2個の解である。

$\pm i$ が定義できたならば、その和や実数倍も定義できるはずである。$i+i=2i,\ 2i+\dfrac{1}{2}i=\dfrac{5}{2}i,$ $-i+\sqrt{3}i=(\sqrt{3}-1)i,$ 等々である。このように、必ず i が付いた数を**純虚数**という。ただし、$0i=0$ であり、これは実数である。

虚数には**大小がない**。不等号を使えるのは、実数に対してのみである。

1.1.2　複素数

実数と純虚数の和で書ける数を**複素数**という。すなわち、「実数＋実数 $\times$ 虚数単位」と書ける数である。実数の集合を R とし、複素数の集合を C と書くと、複素数とは、

$$\alpha=a+bi\ (a,b\in R),\quad z=x+iy\ (x,y\in R),\quad w=u+vi\ (u,v\in R) \tag{1.1}$$

のように書ける数である（$z,w,\alpha\in C$）。実数も、複素数に含まれる。すなわち、$R\subset C$ である。以下では、特に断らない限り、数は複素数とする。虚数に**大小がない**から、一般の複素数にも**大小はない**。

複素数が、数として最も一般的であり、これ以上拡張する必要は今のところない。実際に、量子力学では、値が複素数になる関数を扱わなければならないし、線形代数で学習したベクトルや行列もその要素を複素数に拡張したものを用いる必要がある。この拡張に関しては、付録に付けておいたから、自分で勉強すること。この講義では、関数の取り扱いだけで終わり、線形代数の拡張までやる時間的余裕はない。

1.1.3　複素数の計算法

複素数といえども数であるから、今まで実数にあった和と積の**交換法則**、**結合法則**

$$c_1 + c_2 = c_2 + c_1, \quad c_1 c_2 = c_2 c_1, \quad c_1(c_2 + c_3) = c_1 c_2 + c_1 c_3 \tag{1.2}$$

はそのまま成り立つ。実際には、i を文字変数と同様に（今まで x とか y とか使ってきたように）扱えばよい。違いは、$i^2 = -1$ なので、i^2 が出てきたら -1 に置き換えるという点だけである。以下に例を挙げておくから練習しておくように。

$$\begin{aligned}
&i(-i) = -i^2 = 1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad 2(1-i) = 2 - 2i,, \\
&(1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 2, \\
&i^{2m} = (-1)^m \ (m : \text{整数}), \quad i^{2m+1} = (-1)^m i \ (m : \text{整数}), \\
&(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{3}i) = 1 + (\sqrt{2}-\sqrt{3})i - \sqrt{6}i^2 = 1 + \sqrt{6} - (\sqrt{3}-\sqrt{2})i
\end{aligned} \tag{1.3}$$

1.1.4　実部と虚部

x と y を実数（$x, y \in R$）とし、$z = x + iy$ としたとき、x を z の**実部**、y を z の**虚部**という。書き方は、Re（Real part）と Im（Imaginary part）を用いる。$\mathrm{Re}z = x, \mathrm{Im}z = y$ である。注意して欲しいのは、虚部が実数であることである。以下に例を示す。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}0 = 0,\ \mathrm{Im}0 = 0, \quad \mathrm{Re}2 = 2,\ \mathrm{Im}2 = 0, \quad \mathrm{Re}(-2i) = 0,\ \mathrm{Im}(-2i) = -2, \\
&\mathrm{Re}(1+\sqrt{2}i) = 1,\ \mathrm{Im}(1+\sqrt{2}i) = \sqrt{2}, \\
&\mathrm{Re}(-\sqrt{2}-2i) = -\sqrt{2},\ \mathrm{Im}(-\sqrt{2}-2i) = -2
\end{aligned} \tag{1.4}$$

この例を見ても分かるように、実数とは虚部が 0 であるような複素数で、純虚数とは実部が 0 であり虚部が 0 でない複素数である。あと１つ、実部、虚部が何処まで及ぶのかはっきりさせるために、(　) 等で囲まないと分からないことがあるので注意すること。

２個の複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$、$z_2 = x_2 + iy_2$ （$x_1, y_1, x_2, y_2 \in R$）の和と積の実部・虚部は次のように計算できる（計算練習も兼ねて各自やってみること）。

問題 1　和の実部と虚部

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \tag{1.5}$$

であるから、

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = x_1 + x_2, \quad \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = y_1 + y_2 \tag{1.6}$$

問題 2　積の実部と虚部

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i(x_2 y_1 + x_1 y_2) + i^2 y_1 y_2 \\
&= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

であるから、

$$\mathrm{Re}(z_1 z_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2, \quad \mathrm{Im}(z_1 z_2) = x_2 y_1 + x_1 y_2 \tag{1.8}$$

1.1.5　複素共役

　複素数 z に対して、その虚部の符号を変えたものを z の複素共役と言い、z^* または、$\bar{z}$ と書く。すなわち、$z = x + iy$ $(x,\ y\ \in\ R)$ のとき、

$$z^* = \bar{z} = x - iy \tag{1.9}$$

である。以下に例を挙げる。

$$i^* = -i, \quad (1 - \sqrt{2}i)^* = 1 + \sqrt{2}i, \tag{1.10}$$

明らかに

$$(z^*)^* = \bar{\bar{z}} = z \tag{1.11}$$

が成り立つ。
　また、２個の複素数の和や積の複素共役については、

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^* \tag{1.12}$$

が成り立つ。各自やってみること。

1.1.6　絶対値

　複素数 $z = x + iy$ $(x,\ y\ \in\ R)$ に対して、$\sqrt{x^2 + y^2}$ を z の絶対値といい、$|z|$ と書く。すなわち、

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |z|^2 = x^2 + y^2 \tag{1.13}$$

である。
　ところで、zz^* を計算してみると、

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \tag{1.14}$$

となることが分かる。したがって、絶対値の２乗は z とその複素共役 z^* をかければ得られる。
　２個の複素数の積の絶対値に対しては、

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \tag{1.15}$$

が成り立つ。各自やってみること。

1.1.7　逆数と商

　逆数も実数のときと同様に定義できる。すなわち、かけて１となる数

$$\frac{1}{z} z = \frac{z}{z} = 1 \tag{1.16}$$

である。$1/z = 1/(x+iy)$ は、次のように書き直せる。これに 1 となる z^*/z^* をかけてみれば

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \tag{1.17}$$

となるから、

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{x+iy}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x+iy}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} \tag{1.18}$$

である。

これと同様に考えれば、商の計算もできる。$z_1/z_2 = (x_1+iy_1)/(x_2+iy_2)$ は、

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.19}$$

となるから、

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.20}$$

となる。

以上が複素数とその計算法である。i と $-i$ は、2 乗して -1 となることを忘れないで欲しい。また、複素数まで拡張すれば、単なる数としては完成である。複素数まで含めれば、$n-$ 次方程式の解は n 個存在する。

問題 3　次の方程式を解け。

1. $x^3 = 1$　　2. $x^3 = -1$　　3. $x^4 = 1$　　4. $x^5 = 1$　　5. $x^5 = -1$

第2章　複素平面と関数のグラフ

実数ならば数直線上の点として表すことができる。複素数は、実部と虚部の２個の独立な**実数**からできているから、**２次元の表現**が必要である。すなわち、**平面上の点**として表される。その平面を**複素平面**（または**Gauss 平面**）という。複素数に z を用いる場合は、$z-$ 平面とも言う。当然複素数に w を用いる場合は、$w-$ 平面と言う。

2.1　呼び方

実際には、直交座標（de Carte 座標）の横軸に実部、縦軸に虚部をとる。したがって、縦軸を虚軸といい、横軸を実軸と呼ぶ。縦軸を虚軸、横軸を実軸と呼ぶように今までとは異なる呼び方がある。複素平面のうち、実軸より上側（虚部が正）を「上半面」、下側（虚部が負）を「下半面」という。また、虚軸より右側（実部が正）を「右半面」、虚軸より左側（実部が負）を「左半面」という。平面の右上に変数が何であるかを明記する。

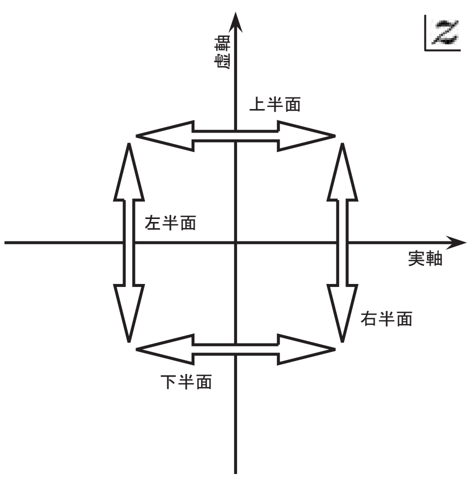

図 2.1: Gauss 平面の書き方と各部分の呼び方。

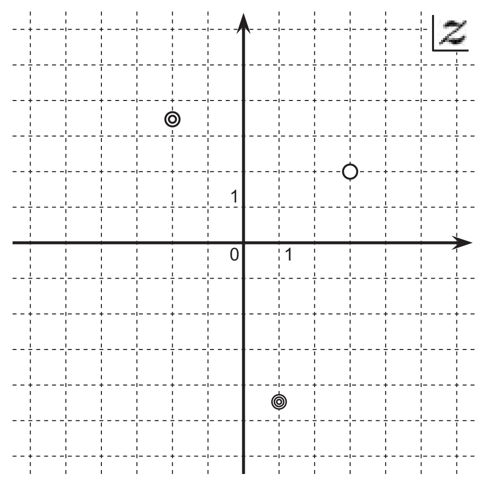

図 2.2: Gauss 平面と例。点線は、x と y が整数に等しいという直線である。○：$3+2i$、二重丸：$-2+2\sqrt{3}i$、三重丸：$1-2\sqrt{5}i$

2.2　複素数を表す点

図 2.2 にどのように点を取るかの例を示した。定義と図から明らかなように、複素数 $z = x+iy$ $(x,\, y \in R)$ に対して対応する点は $(x,\, y)$ である。さらに、絶対値の定義 $(|z| = \sqrt{x^2+y^2})$ から明らかなように、$|z|$ は、原点 0 と点 z の距離である。これからも明らかであるが、複素数は、２次元のベクトルに対応している。実際、２個の複素数の和と差は、図形上は、２個の

ベクトルの和と差と同様の作図により求められる。

一方、積はベクトルの場合、スカラー積とベクトル積があるが、複素数の場合は、単なる数の拡張であるので、積は前にもやったようにやはり複素数になる。

次に、複素共役とか符号を変えたときに複素平面上でどこにくるかを示す。図 2.3 に z が複素平面上で与えられたときに、$-z$, z^* および $-z^*$ がどこに来るかを示した。これらを、$z = x + iy$ $(x, y \in R)$ からスタートし、定義に従って求めていけばすぐに分かるが、複素共役 z^* は実軸に関して対称な位置に、$-z$ は原点対称の位置に、$-z^*$ は z と虚軸に関して対称な位置に来る。

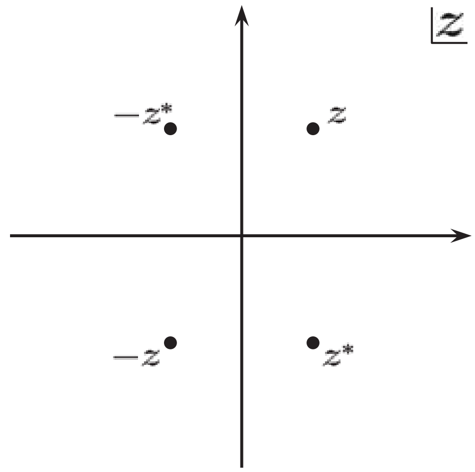

図 2.3: 複素平面上での z と $-z$, z^* および $-z^*$ の関係。

2.3　作図

複素数は複素平面上の点で表されるから、今まで式の上でやってきた基本的な定義や計算は、図形上の意味を持つ。それをここで示すことにする。

2.3.1　和と差

和は、ベクトルの和と同様にできる。図 2.4 に $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ と $z_2 = \sqrt{3} + i$ の和 $z_1 + z_2$ の作図を、図 2.5 に和 $z_1 - z_2$ の作図を示した。
和の場合、まず 2 個の点をプロットし、原点と結ぶ 2 本の線分をつくり、それを基に平行四辺

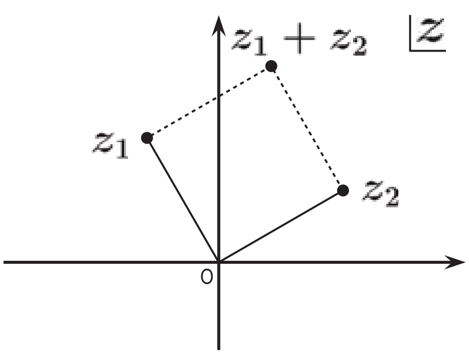

図 2.4: 和 $(z_1 + z_2)$ の作図。ここでは、$z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ と $z_2 = \sqrt{3} + i$ の和を示した。

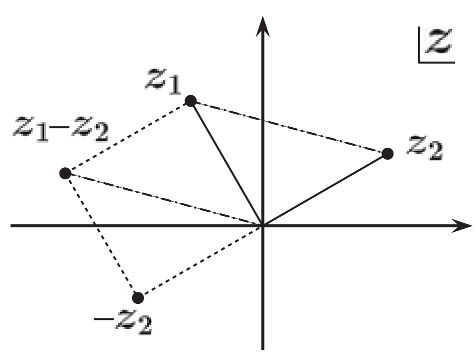

図 2.5: 差 $(z_1 - z_2)$ の作図。

形を描くと、原点の向かい側の頂点が和の位置となる。差 $z_1 - z_2$ の作図は、z_1 に $-z_2$ を加えると思えば、自然とできる（図中の点線のような作図）。ベクトルの差をとるやり方でもできる（図中の１点鎖線）。

2.3.2　絶対値

複素数 $z = x + iy$ $(x,\, y \in R)$ の絶対値は、$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ で与えられる。これは、絶対値 $|z|$ が、原点と点 z との間の距離であることを意味する。また、図 2.5 からも点 z_1 と点 z_2 との間の距離が $|z_1 - z_2|$ により与えられることは、明らかである。これを利用すると、点 z_0 を中心とし、半径 r の円上の点が満たす方程式が、

$$|z - z_0| = r \tag{2.1}$$

となることが分かる。

2.3.3　三角不等式

和と差の作図を見れば、以下の三角不等式が成り立つことが明らかである。

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{2.2}$$

z_2 の符号を変えても、第１項と第３項は変わらず、第２項が $|z_1 - z_2|$ と変わるだけであることに注意せよ。

2.3.4　偏角

点 z と原点とを結ぶ線分と実軸（正の方向）とのなす角を z の偏角 (argument) といい、$\arg z$ と表す。偏角は、**反時計回り**が**正**である。しかし、この角には不定性がある。それは、2π の整数倍の不定性である。すなわち、点の回りの１周が 2π だから、その整数倍変えてももとと同じ場所に来るからである。

図では、$z = 1 + \sqrt{3}i$ としたが、この偏角の**単純に考えた値**は $\dfrac{\pi}{3}$ であるが、１周正の向きに回ってきて、$\dfrac{\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{7\pi}{3}$ としても同じ点になる。あるいは、負の向きに１周回れば、$\dfrac{\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{5\pi}{3}$ でも良いことになる。単純と言っても、角度を $(-\pi,\, \pi]$ の範囲に取るか、$[0,\, 2\pi)$ の範囲に取るかは好みによる。計算の都合上もあるかも知れない。

そこで、$2\pi n$ の不定性はどうでも良い場合には、$\arg z$ と書き、とくに適切な値を取りたい場合には、$\mathrm{Arg} z$ と書くことにする。この大文字の方を使いたい場合は、その都度どの範囲の値を取るのかを明記しなければならない。すなわち、

$$\arg(1 + \sqrt{3}i) \;\; = \;\; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \quad (n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \cdots) \tag{2.3}$$

であり、

$$\mathrm{Arg}(1 + \sqrt{3}i) \;\; = \;\; \frac{\pi}{3} \quad (-\pi < \mathrm{Arg} z \leq \pi) \tag{2.4}$$

または、

$$\mathrm{Arg}(1 + \sqrt{3}i) \;\; = \;\; \frac{\pi}{3} \quad (0 \leq \mathrm{Arg} z < 2\pi) \tag{2.5}$$

である。範囲は、2π にわたってカバーしていればよく、別に $-\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Arg} z \leq \dfrac{3\pi}{2}$ でもかまわない。都合によって変えても良い。

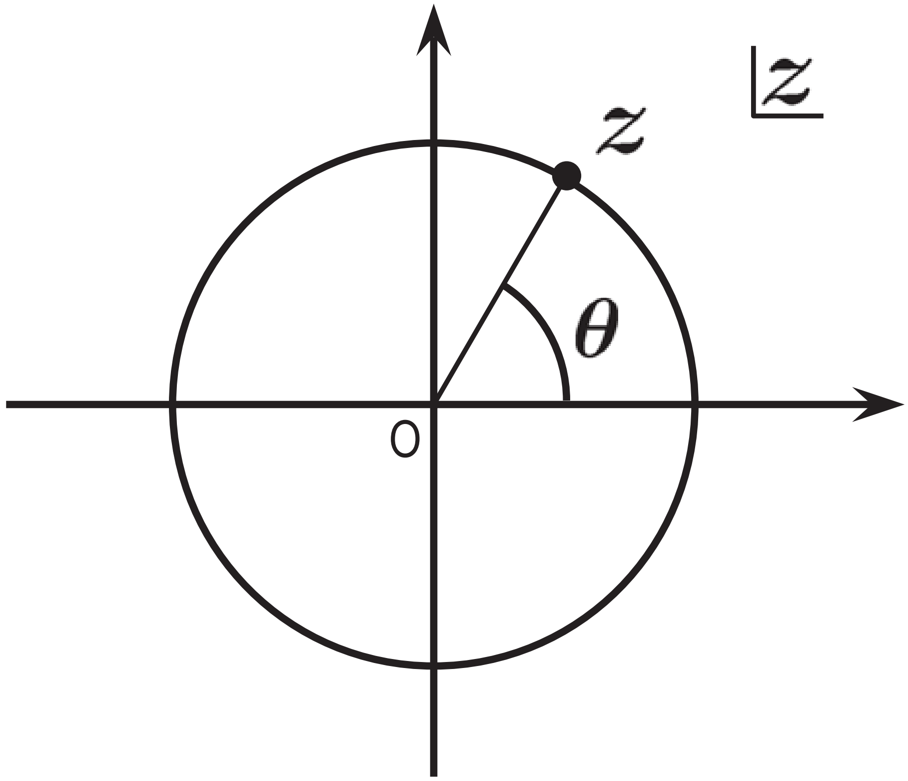

図 2.6: Gauss 平面上での偏角。$\arg z = \theta + 2\pi n$ $(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$ とした。

2.4 Euler の公式

高校でも習ったと思うが、Euler の公式は、

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{2.6}$$

である。この公式を認めると、$z = x + iy$ $(x,\ y \in R)$ のとき、$\theta = \arg z,\ r = |z|$ とおくと、$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ だから、$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\mathrm{e}^{i\theta}$ と書けることになる。すなわち、$z = |z|\mathrm{e}^{\arg z}$ と書ける。

これを、Taylor 展開を用いて証明しようと思う。ただし、少し先で複素関数を学べば詳しく分かるはずのこと（収束半径や正則性）もあるが、ここでは、実関数で用いた知識を単に認めてしまって、そのまま複素数にあてはめてしまうことにする。（計算の規則が同じだから。）

$x = 0$ のまわりの Taylor 展開は、一般に

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{2.7}$$

で与えられる。ただし、$f^{(n)}(0)$ は、関数 $f(x)$ の n 階微分の $x = 0$ における値である。これを指数関数 e^x にあてはめる。指数関数は

$$f^{(n)}(x) \;=\; \mathrm{e}^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1 \tag{2.8}$$

という性質を持つから、式 (2.6) の左辺は、($x \to i\theta$ とおいて)

$$\mathrm{e}^{i\theta} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\theta)^n \tag{2.9}$$

と表される。ここで、$(i\theta)^n = i^n\theta^n$ において、i^n を考えると、n が偶数の時は実数となり、奇数の時は純虚数となることが見て取れるから、和を偶数と奇数の場合に分ける。偶数は、$n = 2m$、奇数は $n = 2m{+}1$ (m:整数) と書ける。したがって、$i^{2m} = (i^2)^m = (-1)^m$、$i^{2m+1} = i(i^2)^m = i(-1)^m$ となる。($(\pm i)^2 = -1$ である。) すなわち、

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{i\theta} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!}(i\theta)^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!}(i\theta)^{2m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m} + i\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\theta^{2m+1} \end{aligned} \tag{2.10}$$

となる。

ここで、式 (2.6) の右辺も同様に Taylor 展開で考えることにする。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta = -\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta = \cos\theta \tag{2.11}$$

であるから、微分を続けていけば、

$$\frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}\theta^{2m}}\cos\theta = (-1)^m\cos\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}^{2m+1}}{\mathrm{d}\theta^{2m+1}}\cos\theta = -(-1)^m\sin\theta \tag{2.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}\theta^{2m}}\sin\theta = (-1)^m\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}^{2m+1}}{\mathrm{d}\theta^{2m+1}}\cos\theta = (-1)^m\cos\theta \tag{2.13}$$

となる(各自確かめよ)から、

$$\left.\frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}\theta^{2m}}\cos\theta\right|_{\theta=0} = (-1)^m, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}^{2m+1}}{\mathrm{d}\theta^{2m+1}}\cos\theta\right|_{\theta=0} = 0 \tag{2.14}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}\theta^{2m}}\sin\theta\right|_{\theta=0} = 0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}^{2m+1}}{\mathrm{d}\theta^{2m+1}}\cos\theta\right|_{\theta=0} = (-1)^m \tag{2.15}$$

となることが得られる。したがって、三角関数の Taylor 展開が、

$$\cos\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m}, \qquad \sin\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\theta^{2m+1} \tag{2.16}$$

と得られ、$\mathrm{e}^{i\theta}$ の Taylor 展開と見比べると、Euler の公式の正しいことが分かる。

ところで、この Euler の公式から、

$$|\mathrm{e}^{i\theta}|^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{2.17}$$

となり、θ が**実数**のときには、

$$|\mathrm{e}^{i\theta}| = 1 \tag{2.18}$$

となることが分かる。この式は重要!θ が実数であれば、$|\mathrm{e}^{i\theta} = 1$ である。これは、後で重要となるので、よく理解しているように。$|\exp(i\,\text{実数})| = 1$ である。

2.4.1 指数関数の公式 $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ は複素数でも成り立つのか？

ここでの問題は、x_1 と x_2 が複素数（純虚数）でも成り立つのかということである。Euler の公式を認めてしまえば、次のようにして成り立つことが分かる。

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta}e^{i\varphi} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi + i(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi) \\
&= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) = e^{i(\theta+\varphi)} \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

この公式を使えば、

$$\left(e^{i\theta}\right)^2 = e^{i\theta}e^{i\theta} = e^{2i\theta} \qquad (2.20)$$

となり、数学的帰納法を用いれば、正の整数 n に対して

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{ni\theta} \qquad (2.21)$$

となることが証明できる（各自確認のこと）。また、

$$e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^0 = 1 \qquad (2.22)$$

だから、

$$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} \qquad (2.23)$$

である。

2.4.2 三角関数の倍角・３倍角の公式

Euler の公式を用いると、三角関数の倍角・３倍角の公式が簡単に導出できる。

$$e^{2i\theta} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta \qquad (2.24)$$

より、

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta, \quad \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta \qquad (2.25)$$

が得られる。３倍角の公式も

$$e^{3i\theta} = \cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) \qquad (2.26)$$

より、

$$
\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \qquad (2.27) \\
\sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

と得られる。

2.4.3　極座標表示

オイラーの公式を用いると、複素数はその絶対値 $|z| = r$ と偏角 $\arg z = \theta$ で表すことができる。通常の直交座標を極座標に直すのと同じことを考えればよい。Gauss 平面の知識を用いれば、$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ だから、

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\mathrm{e}^{i\theta} \tag{2.29}$$

となる。すなわち、

$$z = |z|\mathrm{e}^{i\arg z} \tag{2.30}$$

である。

また、逆数は

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\theta} \tag{2.31}$$

で与えられる。

これにより、n を整数とした時、

$$z^n = |z|^n\mathrm{e}^{in\arg z} \tag{2.32}$$

と書けることもわかる。

2.4.4　応用

このオイラーの公式を認めると、$x^3 = 1$ の方程式の解は簡単に求めることができる。また、$\cos\frac{\pi}{5}$ なども求めることができる。それを例題の形にして以下に示す。

例題１　$x^3 = 1$ を解け。

〔解答〕　$\arg 1 = 2\pi n\ (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ だから、$x = \mathrm{e}^{i\varphi}$ とおくと、

$$x^3 = \mathrm{e}^{3i\varphi} = \mathrm{e}^{2\pi n}\ (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \tag{2.33}$$

より、$\varphi = \dfrac{2\pi n}{3}\ (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ が得られるが、このうち、x として異なる値を与えるのは、$n = -1,\ n = 0,\ n = 1$ の３つある。したがって、解は、

$$\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \mathrm{e}^0 = 1,\ \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{2.34}$$

の３個である。

例題２　$\theta = \dfrac{\pi}{5}$ のとき $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ。

〔解答〕　$5\theta = \pi$ だから、

$$\mathrm{e}^{i5\theta} = \mathrm{e}^{i3\theta}\mathrm{e}^{i2\theta} = \mathrm{e}^{i\pi} = -1 \tag{2.35}$$

が得られる。したがって、

$$\mathrm{e}^{i3\theta} = -\mathrm{e}^{-i2\theta} \Rightarrow \cos 3\theta + i\sin 3\theta = -\cos 2\theta + i\sin 2\theta \tag{2.36}$$

となり、実部と虚部それぞれ等しいとおいて、

$$\cos 3\theta = -\cos 2\theta, \quad \sin 3\theta = \sin 2\theta \tag{2.37}$$

が得られる。この第２式は、倍角・３倍角の公式を用いて、

$$3\cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta = 2\sin\theta\cos\theta \tag{2.38}$$

となるが、$\sin\theta > 0$ を用い、

$$3\cos^2\theta - \sin^2\theta = 4\cos^2\theta - 1 = 2\cos\theta \tag{2.39}$$

となる。$\cos\theta = x > 0$ とおいて、

$$4x^2 - 2x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ \cos\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \tag{2.40}$$

が得られる。また、

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \tag{2.41}$$

となる。

2.5　複素関数とその表示

関数とは、数に数を対応させる規則のことであり、写像ともいう。ここでは、複素数を扱っているから、複素数に複素数を対応させる。複素数 z に複素数 w を規則 f により対応させるときに、

$$w = f(z) \quad \text{とか} \quad z \xrightarrow{f} w \tag{2.42}$$

と書く。複素数であるからいつものように z は $z = x + iy$ $(x,\, y \in R)$ と書かれるのと同様、w にも実部と虚部があり、$w = u + iv$ $(u,\, v \in R)$ とかける。これを詳しく見ると、z すなわち x と y を与えると、u と v が決まるのだから、

$$\mathrm{Re} f(z) = u(x,y), \qquad \mathrm{Im} f(z) = v(x,y) \tag{2.43}$$

となっており、実関数のみ考えた場合は、２変数 x, y の２個の関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ を考えることになる。たとえば、$w = z^2$ という関数の場合、$z = x + iy,\ w = u + iv$ とおくと、

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy \tag{2.44}$$

である。

2.5.1 複素関数のグラフによる表示

関数 $w = z^2$ を例にとって説明する。$z = x + iy,\ w = u + iv$ とおくと、

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy \tag{2.45}$$

である。今、x を固定し、すなわち、定数と考え、y が変化するとすると、u と v の関係は、y を助変数（媒介変数）と考えることができ、y を消去して

$$u = x^2 - \frac{v^2}{4x^2} \tag{2.46}$$

となり、放物線であることが分かる。いくつかの x の値に対して図に示すと以下のようになる。$z-$ 平面上で、$x =$ 定数というのは、虚軸に平行な直線であるが、$w-$ 平面上では放物線に対応する。同様にして、$y =$ 定数の場合は、x を助変数（媒介変数）と考えて消去し、

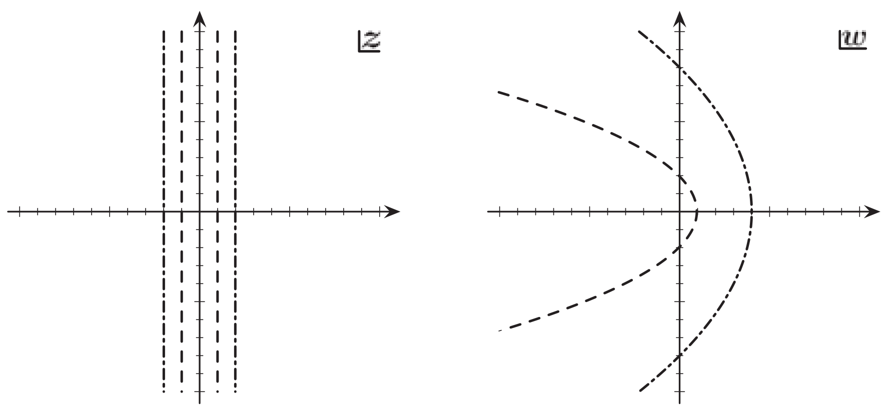

図 2.7: $x = \pm 1$（破線）および $x = \pm 2$（一点鎖線）に対応する $w-$ 平面上の曲線。

$$u = \frac{v^2}{4y^2} - y^2 \tag{2.47}$$

が得られるから、図のように $x =$ 定数の場合とは向きが反対の放物線群が得られる。

逆に、$u =$ 定数となるような $z-$ 平面上の曲線は、

$$x^2 - y^2 = u = \text{定数} \tag{2.48}$$

であるから、$y = \pm x$ を漸近線とする双曲線となり、また、$v =$ 定数の場合には、

$$xy = 2v = \text{定数} \tag{2.49}$$

であるから、$xy = 0$ を漸近線とする双曲線となる。これらは、図 2.9 と図 2.10 に示した。全て、ある曲線（直線）から別の曲線への対応となっている。これを考えれば、関数を写像と呼ぶ理由が少し分かるかも知れない。

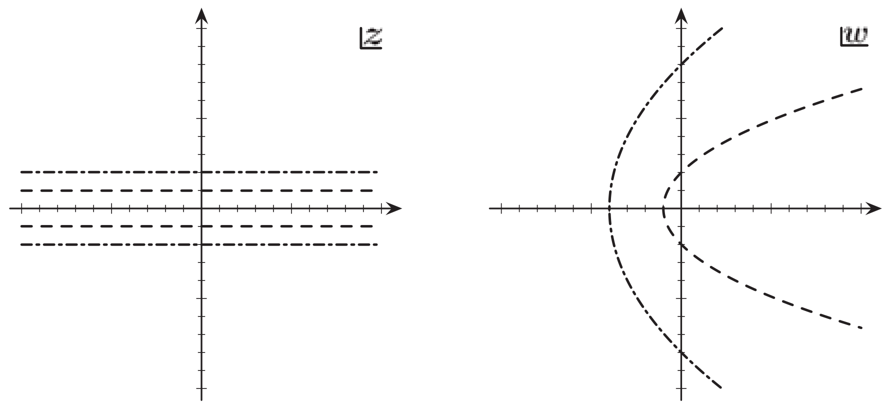

図 2.8: $y=\pm1$（破線）および $y=\pm2$（一点鎖線）に対応する $w-$ 平面上の曲線。

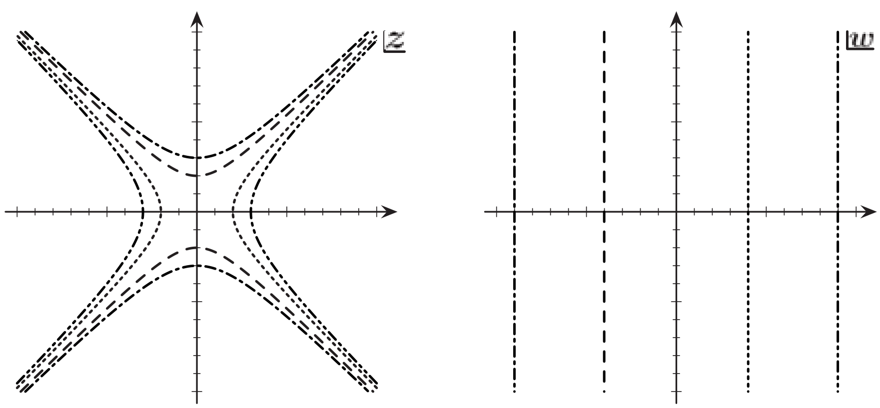

図 2.9: $u=4$（点線）、$u=9$（二点差線）、$u=-4$（破線）および $u=-9$（一点鎖線）に対応する $z-$ 平面上の曲線。

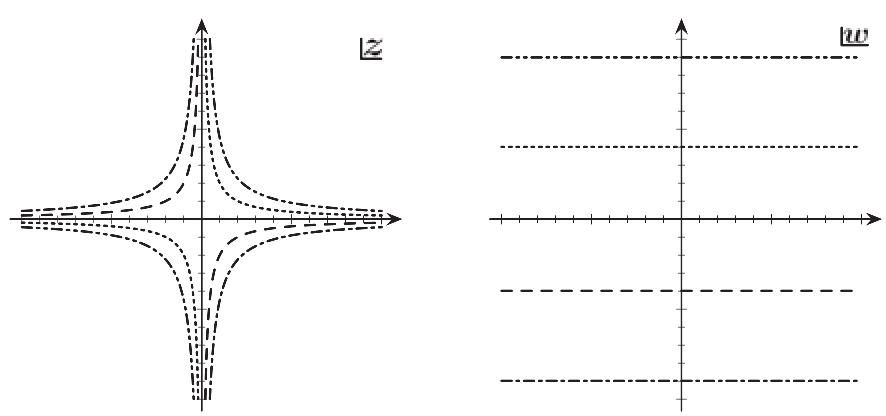

図 2.10: $v=4$（点線）、$v=9$（二点差線）、$v=-4$（破線）および $v=-9$（一点鎖線）に対応する $z-$ 平面上の曲線。

第3章　数列と級数

3.1　数列

番号づけられた複素数の集合：$\{z_n\}$ $(n = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots)$ を（複素）数列という。$z_n \in C$ である。

3.1.1　数列の極限

n を大きくしていったとき、すなわち、$n \to \infty$ としたときに、z_n が**一定値** c に限りなく近づくとき、z_n の $n \to \infty$ の**極限値**は c であるといい、

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \quad \text{あるいは} \quad z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c \tag{3.1}$$

と書く。一定値 c が存在しない場合は、**発散**するという。

- 例 1　$z_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$　具体的に書き表せば、$1,\, \dfrac{1}{2},\, \dfrac{1}{4},\, \cdots$ となり、n を大きくすると絶対値が小さくなる。よって

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \tag{3.2}$$

- 例 2　$z_n = (i)^n$　具体的に書き表せば、$1,\, i,\, -1,\, -i,\, 1,\, \cdots$ となり、4 個の値 $\{1,\, i,\, -1,\, -i\}$ のどれかになり、$z-$ 平面上で、原点を中心とする半径 1 の円上をぐるぐる回り、一定値に収束しない。したがって、発散する。

- 例 3　$z_n = (1+i)^n$　具体的に書き表せば、$1,\, 1+i,\, 2i,\, -2+2i,\, -4,\, \cdots$ となり、原点のまわりをまわりながら、絶対値が大きくなる。したがって、発散する。この場合には、

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \tag{3.3}$$

　と書き、∞ を**無限遠**あるいは**無限遠点**と読む。

一般に複素数は、その絶対値と偏角を用いて、

$$z = r\mathrm{e}^{i\theta}, \quad r = |z|,\ \theta = \arg z \tag{3.4}$$

と書き表せる。これを使えば、上記の例の振る舞いはすぐに分かる。

$$z^n = r^n \mathrm{e}^{in\theta} \tag{3.5}$$

となるから、

$$r > 1 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} z^n = \infty \text{（発散）} \tag{3.6}$$

$$r < 1 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} z^n = 0 \tag{3.7}$$

$$r = 1,\, \theta = 2\pi m(m = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \cdots) \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} z^n = 1 \tag{3.8}$$

$$r = 1,\, \theta \neq 2\pi m(m = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \cdots) \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} z^n = \text{発散（不定）} \tag{3.9}$$

となることが分かる。上記の例は、例１が式 (??) の場合、例２が式 (??) の場合、例３が式 (??) の場合である。

3.1.2 無限遠点

複素数の場合、原点から無限に遠くを無限遠あるいは無限遠点と呼ぶが、ここで無限遠**点**と呼ぶ理由を示すことにする。図を見ながら読んで欲しい。適当な偏角をもつ直線上 Λ に原点を

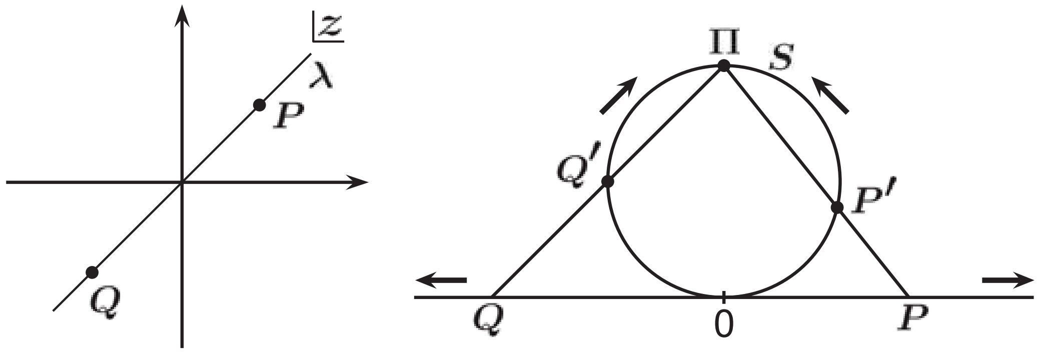

図 3.1: 無限遠点と言われる理由の図示。

挟んで２点 P, P' があるとする。$z-$ 平面に原点で接する球 S を考え、点 Π を原点と直径で結ばれた反対側の点とする。点 Π と P, P' を結ぶ線分と球 S の交点をそれぞれ Q, Q' とすると、$z-$ 平面上の点と球面 S 上の点が１対１に対応することになる。ここで、点 P を原点から遠ざけると、点 Q は点 Π に向かって動く。同様に点 P' も原点から遠ざけると、Q' が点 Π に向かって動く。このように原点から遠ざけて無限遠方に $z-$ 平面上の点を移動させれば、対応する球面上の点は１点 Π に限りなく近づく。すなわち、偏角の如何に関わらず Gauss-平面上の点を原点から無限に遠ざけると対応する球面上の点は Π に近づくのである。この様子を、$z-$ 平面に垂直で直線 Λ を含む平面で切ったときの断面図として図に示した。

3.2 級数

数列の和を級数という。ここでの問題は、無限個の要素からなる数列の和が定義できる（収束する）かどうかにある。前と同様に、数列を $\{z_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ とし、0 以上の整数 n は、∞ まであるとする。この全ての和を

$$S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \tag{3.10}$$

と表すことにする。収束するかどうかは、$n = N$ までの有限個の和 S_N

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} z_n \tag{3.11}$$

を考え、$\{S_N\}$ を数列とみなし、その $N \to \infty$ の振る舞いで決める。すなわち、$\lim_{N\to\infty} S_N$ がただ１個の**有限**な**確定値** A を持てば収束するといい、それを

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{n=0}^{\infty} z_n = A \tag{3.12}$$

と書き、そうでなければ、$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ は発散するという。
例 $z_n = c^n$ の場合、

$$
\begin{aligned}
S_N &= 1 + c + c^2 + \cdots + c^N && (3.13)\\
cS_N &= c + c^2 + \cdots + c^N + c^{N+1} && (3.14)
\end{aligned}
$$

であるから、式 (??) から式 (??) をひくと、

$$(1-c)S_N = 1 - c^{N+1} \tag{3.15}$$

が得られ、

$$S_N = \frac{1-c^{N+1}}{1-c} \ (c \neq 1) \tag{3.16}$$

となる。$c = 1$ の場合は、$S_N = N + 1$ である。よって、$c = 1$ の場合は、明らかに無限遠に発散する。$c \neq 1$ の場合、S_N の収束は、c^{N+1} の収束にかかっているから、

$$
\begin{aligned}
|c| > 1 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} z_n = \infty && (3.17)\\
|c| < 1 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} z_n = \frac{1}{1-c} && (3.18)\\
c = 1 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} z_n = \infty && (3.19)\\
|c| = 1,\, c \neq 1 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} z_n = \text{発散（不定）} && (3.20)
\end{aligned}
$$

である。

3.3 整級数

級数の中でも、特に重要なのが整級数である。これは、複素数 z の 0 以上の整数ベキでできる級数である。すなわち、

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots \tag{3.21}$$

と表される級数である。直前の級数もこの１種である（c の代わりに z と書けば、$c_n = 1$ という整級数）。このうち、$c_N \neq 0$ であり、$N < n$ となる全ての n に対して $c_n = 0$ となるものは、N 次多項式という。多項式だけ考えていてもあまり面白くないから、無限次まで $c_n \neq 0$ となっていると考えて話を進める。

この z がどのような値をとるときに収束するかを考えていくことにする。(直前の級数の場合、この収束するという条件は $|z| < 1$ である。) これに対し、以下のような重要な定理がある。

- **定理：** ある z_0 で整級数 A が収束するとき、$|z| < |z_0|$ を満たす全ての z に対して A は絶対収束する。

- **証明** z_0 で級数が収束するから、

$$\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0 \tag{3.22}$$

であり、$|c_n z_0^n| < M$ を満たす数 M が存在する。z が $|z| < |z_0|$ を満たすとき、

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \left|\frac{z^n}{z_0^n}\right| < M \left|\frac{z^n}{z_0^n}\right| \tag{3.23}$$

であるから、

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| < M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z^n}{z_0^n}\right| = \frac{M}{1 - \left|\frac{z^n}{z_0^n}\right|} \tag{3.24}$$

となり、絶対収束する。

この定理から言えることは大きい。この定理は「絶対値が $|z_0|$ より小さければ」と言っている。「絶対値がある正の実数 R よりも小さい点の集合」は、複素平面における絶対値のもつ意味が「原点からの距離」であることを考えれば、「原点を中心とした半径 R の円の内部」であるということがすぐに分かる。すなわち、「絶対収束するのは原点を中心とするある半径 $R_{\rm c}$ の**円の内部**である」と言っている。この円を**収束円、その半径 $R_{\rm c}$ を収束半径という。始めに挙げた例：$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ の収束半径は１である。注意しておくが、この円周上については何も言っていない。**

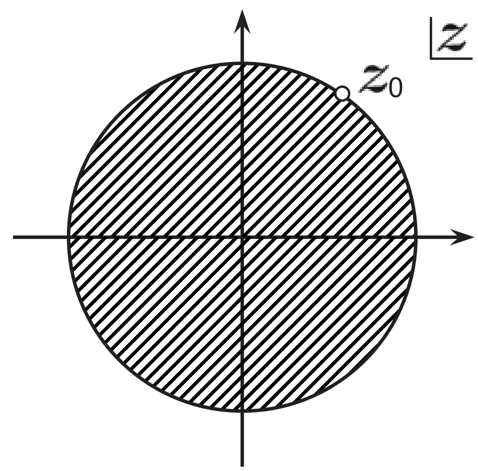

図 3.2: $|z| < |z_0|$ の範囲。

したがって、整級数は、次のうちどれかである。

1. $z = 0$ しか収束しない。$\Rightarrow$ $R_{\rm c} = 0$ と思えばよい。
2. 収束半径が有限
3. 無限遠点を除く全ての複素数 z に対して収束する。$\Rightarrow$ $R_{\rm c} = \infty$ と思えばよい。

3.3.1 収束半径の求め方

収束半径を求めるには、いくつかの方法がある。最も代表的な方法は、

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda \ \text{ならば}\ R_{\rm c} = \frac{1}{\lambda} \tag{3.25}$$

である。この $n \to \infty$ の極限が**存在**すれば、その逆数が収束半径になる。殆どの場合は、これで事が足りる。z も含めてつづく２項の比を考えると、

$$\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right||z| \tag{3.26}$$

となり、式 (3.25) の極限 λ が存在すると言うことは、n を大きくしていったときに絶対値をとった級数が、公比 $|\lambda||z|$ の等比級数に限りなく近づくことを意味している。等比級数の収束半径は 1 だから、λ の逆数が収束半径である。

もう１つの求め方は、Cauchy-Hadamard の定理と言われるが、

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|c_n|^{\frac{1}{n}} \;=\; \lambda \;\; \text{ならば} \;\; R_{\mathrm{c}} = \frac{1}{\lambda} \tag{3.27}$$

というものである。これも、$|c_n z^n| = (|c_n^{\frac{1}{n}}||z|)^n$ と書き直してみれば、明らかだろうと思う。

3.3.2 収束円周上の収束・発散

物質科学をやっている場合、めったに用いることはないが、収束円周上の z に対する収束・発散については、以下のような定理がある。

- 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の係数の間に、

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \quad (\alpha \text{と} \beta \text{は定数}, \;\; \beta > 1) \tag{3.28}$$

という関係があるとき、収束円 $|z| = 1$ の円周上では、

1. $\mathrm{Re}\alpha > 1$ ならば、いたるところで絶対収束
2. $0 < \mathrm{Re}\alpha \leq 1$ ならば、$z = 1$ でのみ発散
3. $\mathrm{Re}\alpha \leq 0$ ならば、いたるところで発散

である。

第4章　複素関数

前にも述べたが、関数とは、数に数を対応させる規則のことであり、写像とも呼ばれる。ここでは、複素数を扱っているから、複素数に複素数を対応させる。複素数 z に複素数 w を規則 f により対応させるときに、

$$w = f(z) \quad \text{とか} \quad z \xrightarrow{f} w \tag{4.1}$$

と書く。

多項式で与えられる場合は計算法が明らかであり問題はないが、実関数の範囲でも指数関数、三角関数、双曲線関数、対数関数、ベキ関数などの初等関数を用いてきたはずである。これらの関数はどのようにして複素関数として範囲を広げればよいのか、また、実関数同様に微分と積分についても考えていくことにする。

複素数であるからいつものように z は $z = x + iy$ $(x,\, y \in R)$ と書かれるのと同様、w にも実部と虚部があり、$w = u + iv$ $(u,\, v \in R)$ とかける。これを詳しく見ると、z すなわち x と y を与えると、u と v が決まるのだから、

$$\mathrm{Re} f(z) = u(x, y), \qquad \mathrm{Im} f(z) = v(x, y) \tag{4.2}$$

となっており、実関数のみ考えた場合は、2 変数 $x,\, y$ の 2 個の関数 $u(x, y),\, v(x, y)$ を考えることになる。たとえば、$w = z^2$ という関数の場合、$z = x + iy,\ w = u + iv$ とおくと、

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy \tag{4.3}$$

である。

4.1　複素関数の連続性

まず、関数の連続性について述べる。実数のみ扱う場合、例えば $y = f(x)$ の場合、$x \to x_0$ の極限を考えるとき、数直線上で x_0 の右側からと左側からの 2 種類の近づけ方がある。複素数の場合は $z \to z_0$ の極限をとるときに複素数は平面上の点で表されるから、その近づけ方は無限にある。この点が実関数との違いである。

4.1.1　関数の極限値

複素関数 $w = f(z)$ について考え、その定義される領域を D とする。

複素数 z_0 に収束する数列 $\{z_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を考える。数列：$\{f(z_n)\}$ が、複素数 c に収束するならば、すなわち、

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = c \tag{4.4}$$

ならば、**この数列 $\{z_n\}$ に沿った $f(z)$ の極限値**は、c であるという。
　この極限値 c が、z_0 に収束する**いかなる数列**に対しても、同じであるとき、

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = c \tag{4.5}$$

と書く。これが成立しない例を以下に示す。

- **極限の存在しない例：**　$f(z) = \dfrac{z^*}{z}$ に対して、$z \to 0$ を考える。
  $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ とおくと、$z \to 0$ は、$r \to 0$ と同等である。しかし、

$$f(z) \ = \ \frac{r\mathrm{e}^{-i\theta}}{r\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-2i\theta} \tag{4.6}$$

  だから、$z \to 0$ の極限は、偏角 θ に依存する。すなわち、Gauss 平面上のどの方向から 0 へ近づけるかに依存する。したがって、$z \to 0$ の極限は、存在しない。

極限値に対して成立すること
　2 個の関数 $f(z)$ と $g(z)$ があり、

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = c, \qquad \lim_{z \to z_0} g(z) = d \tag{4.7}$$

のとき、以下のことが成り立つ。

1. 2 個の関数の和と差に対して、

$$\lim_{z \to z_0} \{f(z) \pm g(z)\} \ = \ c \pm d \tag{4.8}$$

2. 2 個の関数の積に対して、

$$\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) \ = \ cd \tag{4.9}$$

3. 2 個の関数の商に対して、$d \neq 0$ のとき、

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} \ = \ \frac{c}{d} \tag{4.10}$$

4.1.2　関数の連続性

　極限値

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \ = \ c \tag{4.11}$$

が、$f(z_0)$（実際に定義にしたがって計算される値）に等しいとき、すなわち、

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \ = \ f(z_0) \tag{4.12}$$

のとき、「$f(z)$ は、$z = z_0$ において**連続**である」という。

4.2 微分

関数の微分の定義は、見かけ上実関数の場合と変わらない。複素変数 z のある**領域内部**で定義された関数 $w = f(z)$ について考える。D 内部の点 z_0 に対して、

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{4.13}$$

が**存在**して**有限**である（唯一の確定値をもつ）とき、関数 $f(z)$ は、$z = z_0$ で**微分可能**であるといい、

$$\left(\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_0}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(z)\right)_{z=z_0}, \quad f'(z_0) \tag{4.14}$$

などと書く。見かけ上変わらないと言っても、複素数の極限の場合、「複素数としてどのような近づけ方をしても唯一の確定値をもつ」という条件は、実数の場合よりもきつい。

極限の書き方は色々ある。

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lambda \tag{4.15}$$

は、

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lambda \tag{4.16}$$

とも、

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \lambda \right| = 0 \tag{4.17}$$

とも書くことが出来る。z_0 以外の点でも微分可能であれば、微分したものを z の関数と考えて、**導関数**と呼び、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(z), \quad f'(z), \quad \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} \tag{4.18}$$

などと書く。

以下に微分できる例と、出来ない例を示す。

微分できる例

$w = f(z) = z^2$ のとき

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \frac{2hz + h^2}{h} 2z + h \tag{4.19}$$

であるから、

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = 2z \tag{4.20}$$

となり、

z がどんな複素数でも微分可能で、導関数は、

$$f'(z) = 2z \tag{4.21}$$

である。

微分できない例
$f(z) = z^*$ とする。

$$f(z+h) - f(z) = (z+h)^* - z^* = h^* \tag{4.22}$$

だから、

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{h^*}{h} \tag{4.23}$$

となるが、前にもやったように、これは、$h \to 0$ の極限が存在しない。したがって、複素平面上の**いたるところ**で**微分不可能**である。

4.2.1 Cauchy–Riemann の方程式

微分可能性に対する**判定条件**を与えているのが、Cauchy–Riemann の方程式である。$z = x + iy$, $h = h_x + ih_y$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とし、

$$A = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{4.24}$$

とおく。やるべきことは、はじめに $h_y = 0$ としておいて $h_x \to 0$ の極限をとったときと、はじめに $h_x = 0$ としておいて $h_y \to 0$ の極限をとったときの結果を比較することである。

1. **$h_y = 0$ のとき**

$$Ah_x = f(z+h_x) - f(z) = u(x+h_x, y) - u(x,y) + i\{v(x+h_x, y) - v(x,y)\} \tag{4.25}$$

であるから、

$$A_1 = \lim_{h_x \to 0} A = \lim_{h_x \to 0} \frac{u(x+h_x, y) - u(x,y)}{h_x} + i \lim_{h_x \to 0} \frac{v(x+h_x, y) - v(x,y)}{h_x} \tag{4.26}$$

となり

$$A_1 = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \tag{4.27}$$

となる。

2. **$h_x = 0$ のとき**

$$Aih_y = u(x, y+h_y) - u(x,y) + i\{v(x, y+h_y) - v(x,y)\} \tag{4.28}$$

であるから

$$A_2 = \lim_{h_y \to 0} A = \lim_{h_y \to 0} \frac{u(x, y+h_y) - u(x,y)}{ih_y} + i \lim_{h_y \to 0} \frac{v(x, y+h_y) - v(x,y)}{ih_y} \tag{4.29}$$

となり、

$$A_2 = -i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \tag{4.30}$$

となる。

これらの結果で、A_1, A_2 の実部と虚部を比較して Cauchy–Riemann の方程式

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \tag{4.32}$$

が得られる。

4.2.2　微分可能である十分条件

やはり、$h = h_x + ih_y$ とする。

$$f(z) = u(x,\, y) + iv(x,\, y), \quad f(z+h) = u(x+h_x,\, y+h_y) + iv(x+h_x,\, y+h_y) \tag{4.33}$$

だから

$$R = \mathrm{Re}(f(z+h) - f(z)) = u(x+h_x,\, y+h_y) - u(x,\, y), \tag{4.34}$$

$$I = \mathrm{Im}(f(z+h) - f(z))v(x+h_x,\, y+h_y) - v(x,\, y) \tag{4.35}$$

となる。もし

$$R = u(x+h_x,\, y+h_y) - u(x,\, y) = h_x\frac{\partial u}{\partial x} + h_y\frac{\partial u}{\partial y} + o(|h|) \tag{4.36}$$

$$I = v(x+h_x,\, y+h_y) - v(x,\, y) = h_x\frac{\partial v}{\partial x} + h_y\frac{\partial v}{\partial y} + o(|h|) \tag{4.37}$$

とできれば、

$$f(z+h) - f(z) = \left(h_x\frac{\partial u}{\partial x} + h_y\frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\left(h_x\frac{\partial v}{\partial x} + h_y\frac{\partial v}{\partial y}\right) + o(|h|) \tag{4.38}$$

となるが、ここで Cauchy–Riemann の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.39}$$

を使い、x に対する偏微分だけで書く。

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= \left(h_x\frac{\partial u}{\partial x} - h_y\frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(h_x\frac{\partial v}{\partial x} + h_y\frac{\partial u}{\partial x}\right) + o(|h|) \\ &= (h_x + ih_y)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + o(|h|) = h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + o(|h|) \end{aligned} \tag{4.40}$$

となり、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{o(|h|)}{h}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{4.41}$$

と極限が存在することになる。したがって、u と v が**全微分可能**であり、Cauchy–Riemann の方程式を満たせば、関数 $f(z)$ は、**微分可能** である。

4.3 正則関数

関数 $f(z)$ が、ある領域 D の**内部の各点**で**微分可能**なとき、$f(z)$ は ***D* において正則**であるという。注意しなければならないのは、**領域内部**ということである。すなわち、内部がなければならない。

4.3.1 正則点と特異点

関数が正則である点を**正則点**、正則でない点を**特異点**という。あとで述べるが、関数の特徴は**特異点**に現れる。したがって、特定の関数の性質を知りたかったら、その関数の**特異点**を調べ上げなければならない。

例 $f(z) = \dfrac{z^{*2} - z^2}{2} + zz^* = x^2 + y^2 - 2ixy$

$$u = x^2 + y^2, \quad v = -2xy \tag{4.42}$$

である。したがって、

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y} = 2yM v_x \equiv \frac{\partial v}{\partial x} = -2y, \quad v_y \equiv \frac{\partial v}{\partial y} = -2x \tag{4.43}$$

となる。u も v も偏微分でき、その結果が連続である。したがって、全微分可能である。しかし、Cauchy–Riemann の方程式は

$$2x = -2x, \qquad 2y = 2y \tag{4.44}$$

となり、$x = 0$、任意の y でのみ満たしている。したがって、虚軸上で微分可能である。線上ということは、領域内部はない。したがって、$z-$ 平面上いたるところ特異点である。(正則点はない。)

4.3.2 正則関数の性質

2 個の正則関数 $f(z)$, $g(z)$ について次の性質がある。

1. **和と差**について

$$\{f(z) \pm g(z)\}' = f'(z) \pm g'(z) \tag{4.45}$$

2. **積**について

$$\{f(z)g(z)\}' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \tag{4.46}$$

3. **商**について

$$\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\}' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2} \tag{4.47}$$

また、

1. 多項式は、**いたるところ**で**正則**である。

2. 有理分数関数

$$R(z) \;=\; \frac{P(z)}{Q(z)} \;\; (P(z),\ Q(z) \text{ は多項式で既約とする}) \tag{4.48}$$

は、$Q(z)=0$ となる点を**除いて**いたるところ**正則**である。

4.3.3 極

関数が正則でない点を特異点というが、関数の特徴は特異点に現れるので、その極限をとるときの関数の振る舞いに応じて各種の名前が付いている。そのうち、最も単純な特異点が極である。ここでは例として、有理分数関数を取り上げる。たとえば、$R(z)=\dfrac{1}{z-i}$ について考えよう。$z=i$ が特異点である。(分母が 0 になる。) この点に z を近づけるとき、すなわち、$z=i+h,\ h\to 0$ を考えると、h がどのような 0 への近づき方をしても、$R(z)\to\infty$ となる。このようにどのような近づけ方をしても無限遠に発散するような孤立した特異点を「**極**」という。さらに、分母が 0 に近づく次数が 1 次であるような場合、「**1 位の極**」と言う。この次数が 2 次であるときは、「**2 位の極**」と呼ぶ。n 次ならば、、「n **位の極**」である。

4.3.4 合成関数 $f(g(z))$

$Z=g(z)$ が z の領域 D で正則であり、$w=f(Z)$ が D に対応する Z の領域 E で正則なとき、w を z の関数としてみた $w=f(g(z))$ ($f\circ g(z)$ とも書く) は、D で正則である。その導関数は、

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}Z}\right)_{Z=g(z)}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}=f'(g(z))g'(z) \tag{4.49}$$

により与えられる。

4.3.5 逆関数

$w=f(z)$ が z の領域 D で正則ならば、その**逆関数** $\boldsymbol{z=f^{-1}(z)}$ は、$\boldsymbol{\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=0}$ **となる** $\boldsymbol{w}$ **の点を除いて** D に対応する w の領域で正則であり、その導関数は、

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}} \tag{4.50}$$

で与えられる。

4.3.6 等角写像

正則関数は、**等角写像**と呼ばれることがある。その理由を以下に示す。

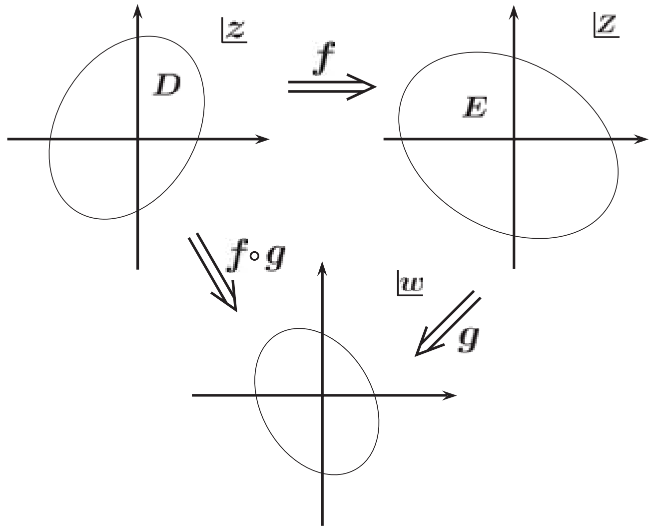

図 4.1: 合成関数

関数 $w=f(z)$ の正則点 z_0 の近傍を考える。z_0 と $z_0+\delta z$ での関数の値の変化分 δw は、

$$\delta w = f(z_0+\delta z) - f(z_0) \tag{4.51}$$

であるが、$|\delta z|$ が十分に小さければ、

$$\delta w = f'(z_0)\delta z + o(\delta z) \tag{4.52}$$

と書ける（全微分可能）。微分を考えるときには、$\delta z \to 0$ の極限をとることになるから、以下では、$o(\delta z)$ の項は無視する。

絶対値と偏角について考えると、

$$|\delta w| = |f'(z_0)||\delta z|, \quad \arg(\delta w) = \arg\{f'(z_0)\} + \arg(\delta z) \tag{4.53}$$

となる。したがって絶対値は、$\boldsymbol{|f'(z_0)|}$ **倍**になり偏角は、$\boldsymbol{\arg f'(z_0)}$ **だけ**変化する。

とくに、2 種類の変化 δz_1 と δz_2 に対する δw の偏角 δw_1 と δw_2 を考えると、

$$\begin{aligned}
\arg(\delta w_1) &= \arg\{f'(z_0)\} + \arg(\delta z_1) \qquad (4.54)\\
\arg(\delta w_2) &= \arg\{f'(z_0)\} + \arg(\delta z_2) \qquad (4.55)
\end{aligned}$$

となるから、両辺の引き算をすれば、

$$\arg(\delta w_1) - \arg(\delta w_2) = \arg(\delta z_1) - \arg(\delta z_2) \tag{4.56}$$

となって、z の偏角の変化と w の偏角の変化が**等しい**ことになる。すなわち、$z-$ 平面上の z_0 の周りの角度は、$w-$ 平面上でも**保存**する。

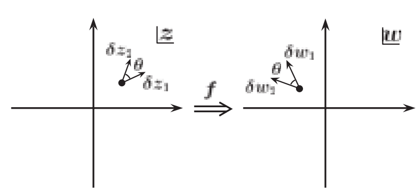

図 4.2: 等角写像と言われる理由。

4.3.7　無限遠点での性質

$f(z)$ の $z=\infty$ での性質は、$\zeta = \dfrac{1}{z}$ とおいて、$f(\dfrac{1}{\zeta})$ の $\zeta=0$ での性質で決める。以下に例を示す。

- 例：　$f(z) = \dfrac{z^2+1}{z(z+1)}$

  $z = \dfrac{1}{\zeta}$ とおくと、

$$g(\zeta) = f(\frac{1}{\zeta}) = \frac{1+\zeta^2}{1+\zeta} \tag{4.57}$$

  となり、$g(\zeta)$ は、$\zeta=0$ で連続かつ正則である。よって、$f(z)$ は、$z=\infty$ で連続かつ正則である。

4.4　整級数で表される関数

数列と級数のところで、特に重要な級数として整級数

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{4.58}$$

について、収束条件、収束半径などについて書いた。理由は、Euler の公式のときにやったように、関数を複素数に拡張するときに整級数による表現がよく用いられるからである。そこでやったことをまとめると、

1. 原点を中心とした半径 R の円の内部で絶対収束する。
2. この円を収束円、半径 R を収束半径という。
3. 収束半径は、以下により求められる。
   (a) 通常よく用いられる方法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda \ \ \text{ならば}\ \ R_{\mathrm{c}} = \frac{1}{\lambda} \tag{4.59}$$

   (b) Cauchy-Hadamard の方法

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|c_n|^{\frac{1}{n}} \ = \ \lambda \ \ \text{ならば}\ \ R_{\mathrm{c}} = \frac{1}{\lambda} \tag{4.60}$$

収束円内部なら何処でも、ちゃんと収束して 1 個の確定値が決まるのだから、z の関数と見なすことができる。したがって、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{4.61}$$

と書いても良い。たとえば、$c_n = 1$ である幾何級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{4.62}$$

について考えてみよう。この級数の収束半径は前にも見たように1である。また、$|z| < 1$ のとき $\dfrac{1}{1-z}$ に収束することも見た。ということは、この整級数を用いて表された関数 $f(z)$ は、$|z| < 1$ のときだけ、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \tag{4.63}$$

と言うことになる。(いつでもこの等号が成り立つわけではない。)

4.4.1 微分

整級数で与えられた関数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{4.64}$$

があり、その収束半径を R とする。この各項を微分(項別微分)した級数を作ると、

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} z^n \tag{4.65}$$

が得られるが、

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+2)c_{n+2}}{(n+1)c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)c_{n+1}}{n c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \left(n + \frac{1}{n} \right) \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{1}{R} \tag{4.66}$$

となって、$f(z)$ と同じ収束半径を持つことが分かる。収束円内部ではどこでも、$f(z)$ も $g(z)$ も絶対収束し、確定した値をとる。このことは、$g(z)$ が $f(z)$ の微分

$$g(z) = f'(z) \tag{4.67}$$

を与えると言うことを意味しているに他ならない。すなわち、**整級数で与えられた関数は、収束円内部では微分可能**で、**その微分は、項別微分して得られる**のである。したがって、収束円内部では正則な関数である。この項別微分を続けても収束半径は常に変わらないことを考えると、**整級数で与えられた関数は、収束円内部では何回でも微分可能**ということになる。これは、**正則な関数は何回でも微分可能**であることを示唆している。

第5章　初等関数

ここでは、指数関数を始めとして、それから派生する初等関数について述べる。実関数としては、既に知っている関数でも数を複素数に拡張するのだから、複素関数として再定義しなければならない。これらの関数は、物理・化学で日常的に用いられる関数である。

5.1　指数関数

指数関数の定義は、Euler の公式のところで使ったものである。この関数の定義は、整級数

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{5.1}$$

により与えられる。すなわち、$c_n = \dfrac{1}{n!}$ となる関数である。整級数で定義を与えたら、その正則領域、すなわち、収束半径を調べなければならない。

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\right| = 0 \tag{5.2}$$

であるから、$R=\infty$ である。したがって、複素平面上いたるところ正則である。ただ、無限遠点は別である。$z\to\infty$ の極限は、無限遠点への近づけ方で値が変わる。左半面で無限遠に近づけると 0 に収束し、右半面で近づければ ∞ に発散する。虚軸上の場合は、不定である。このような特異点を真性特異点という。

後でベキ関数を勉強すると分かることであるが、ベキ関数は多価関数なので、指数関数を e^z と書くと問題になることがある。正しい表記は $\exp z$ と書くことである。間違える気遣いのない場合は、e^z と書いても構わない。Euler の公式のところでは、e^z を使ってしまった。物理や化学では、、e^z を通常使っている。

5.1.1　指数関数の微分

無限遠点を除けば、正則であるから、項別微分して微分を求めることができる。

$$\frac{\mathrm{d}\exp z}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z^n}{(n)!}\exp z \tag{5.3}$$

である。すなわち、指数関数は、自分自身が微分となっている。

5.1.2　指数関数の周期

実は、指数関数は周期関数である。周期 T とは、関数 $f(z)$ の任意の z に対して

$$f(z+T) = f(z) \tag{5.4}$$

を成り立たせる T のうち、0 でなくて絶対値が最少のものをいう。（T でこの式が成り立つならば、$2T$ でも当然成り立つ。）指数関数に対しては、

$$\exp(z+T)=\exp z \;\Rightarrow\; \exp T=1 \tag{5.5}$$

が得られ、この解は、

$$T=2\pi in\ (n=0,\,\pm1,\,\pm2,\,\cdots) \tag{5.6}$$

であるが、0 でないもののうち、絶対値の小さい $2\pi i$ が周期である。（$-2\pi i$ でも構わないが普通は $2\pi i$ を採用する。）したがって、指数関数の周期は純虚数である。実関数だけを考えているとこの性質は出てこない。

5.1.3 その他の性質

指数関数にはよく知られた $\exp(z_1)\exp(z_2)=\exp(z_1+z_2)$ という特殊な性質がある。これをここで定義（整級数で与えられている）にしたがって証明する。

$$\exp(z_1)\exp(z_2) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z_1^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^m z_2^n}{m!n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z_1^m z_2^n}{m!n!} \tag{5.7}$$

ここで、各級数の和は、絶対収束することが分かっているから、順序をどのように入れ替えても良い。したがって、２重和のように書いた。ところで、この２重和は、図 5.1 に示すような

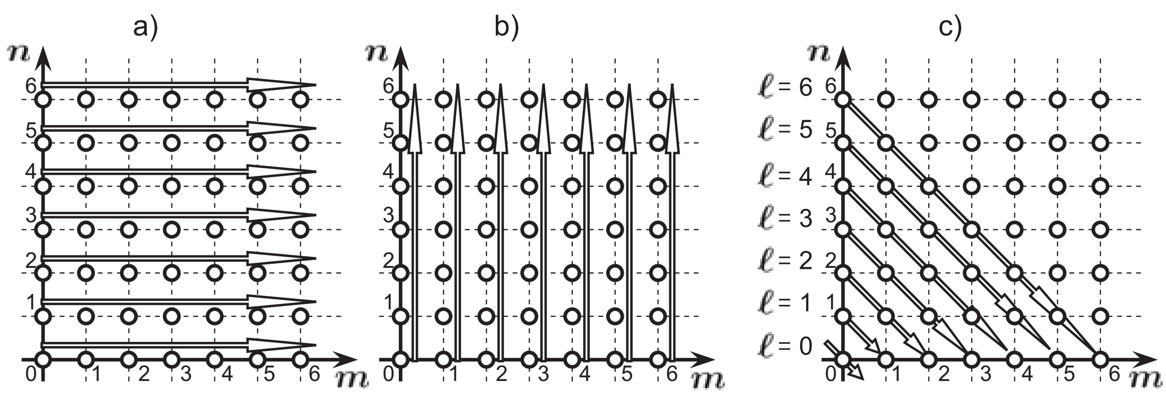

図 5.1: ２重和のとりかた。a) n を固定しておいて m の和をとり、次に n の和をとる。b) m を固定しておいて n の和をとり、次に m の和をとる。c) $\ell=m+n$ を固定し、m に対して $0\to\ell$ の和をとり、次に ℓ の和をとる。

点に対して和をとることを意味している。すなわち、$m-$ 軸と $n-$ 軸を含めて、mn 平面上の第１象限の整数で与えられる点に関する和である。これらの点全てについての和をとればよいのだから、$\ell=m+n$ と定義し、m について 0 から ℓ 間で和を作り、ℓ について 0 から ∞ まで和をとれば、これらの点全てについての和をとることができる。(図 5.1 c) 参照。）このような和の取り方をすると、

$$\exp(z_1)\exp(z_2) \;=\; =\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\frac{z_1^m z_2^{\ell-m}}{m!(\ell-m)!}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{\ell!}\sum_{m=0}^{\ell}\frac{\ell! z_1^m z_2^{\ell-m}}{m!(\ell-m)!} \tag{5.8}$$

となるが、２項定理より、

$$\sum_{m=0}^{\ell}\frac{\ell! z_1^m z_2^{\ell-m}}{m!(\ell-m)!}=(z_1+z_2)^\ell \tag{5.9}$$

であるから、

$$\exp(z_1)\exp(z_2) \;=\; =\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{\ell!}(z_1+z_2)^\ell=\exp(z_1+z_2) \tag{5.10}$$

が得られる。
　これにより、

$$\exp(z)\exp(-z)=\exp(z-z)=\exp 0=1 \tag{5.11}$$

がいえるから、

$$\exp(-z)=\frac{1}{\exp z} \tag{5.12}$$

や、

$$(\exp z)^2=\exp(z)\exp(z)=\exp(2z),\ \cdots\ (\exp z)^n=\exp(nz)\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{5.13}$$

が成り立つことが分かる。

5.2　三角関数

　三角関数は、指数関数を用いて定義される。まず、cos と sin を定義する。これも、Euler の公式を見れば、すぐ分かると思うが、

$$\cos z \;=\; \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2} \tag{5.14}$$

$$\sin z \;=\; \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i} \tag{5.15}$$

が定義である。指数関数が複素平面上いたるところ正則であるから、その和や差で出来ている cos と sin も、複素平面上いたるところ正則である。
　三角関数の微分も、指数関数の微分が分かっているから、

$$\frac{\mathrm{d}\exp(\pm iz)}{\mathrm{d}z} \;=\; \pm i\exp(\pm iz) \tag{5.16}$$

を使えば直ちにできて、

$$\frac{\mathrm{d}\cos z}{\mathrm{d}z} \;=\; i\frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2}=-\frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}=-\sin z \tag{5.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sin z}{\mathrm{d}z} \;=\; \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}=\cos z \tag{5.18}$$

となることが分かる。（実関数でやったのと同じ。）

5.2.1 整級数による表現

整級数による表現は、指数関数の整級数による表現を用いればすぐに分かる。

$$\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \tag{5.19}$$

となるが、$(iz)^n = i^n z^n$ であるから、n が偶数だと、$i^2 = -1$ を用いたとき i がでてこない。n が奇数の時にでてくる。すなわち、

$$i^{2m} = (i^2)^m = (-1)^m, \quad i^{2m+1} = i(i^2)^m = (-1)^m i \quad (m = 0, 1, 2, \cdots) \tag{5.20}$$

という性質があるから、n の和を偶数と奇数に分けることができる。

$$\begin{aligned}\exp(iz) &= \sum_{n=0,\mathrm{even}}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=1,\mathrm{odd}}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!} \end{aligned} \tag{5.21}$$

が得られる。$\exp(-iz)$ は $\exp(iz)$ で z の符号を変えたものと考えても良いから、奇数次の項、すなわち、i のついている項の符号が変わると思えばよい。したがって、$\exp(iz)$ と $\exp(-iz)$ の和では奇数次の項が、差では偶数次の項が消えることになる。したがって、

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \cdots, \tag{5.22}$$

$$\sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \tag{5.23}$$

が得られることになる。

5.2.2 周期

ここでは、$\cos z$ の周期を求める。$\sin z$ の周期については自分で求めてみること。周期を T とする。任意の z に対して

$$\exp(iz) + \exp(-iz) = \exp\{i(z+T)\} + \exp\{-i(z+T)\} \tag{5.24}$$

を満たす T を求めればよい。右辺を左辺に移項すれば、

$$\begin{aligned}&\{1 - \exp(iT)\}[\exp(iz) - \exp\{-i(z+T)\}] = 0 \\ &\quad \Rightarrow \quad \exp(iT) = 1 \text{ または } \exp(iz) = \exp\{-i(z+T)\}\end{aligned} \tag{5.25}$$

を得るが、任意の z に対して成り立つのは、

$$\exp(iT) = 1 \;\Rightarrow\; T = 2\pi n \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{5.26}$$

である。したがって、周期は、2π である。

5.2.3 その他の性質

良く知られた性質 $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ が一般の複素数で成り立つことも、

$$\begin{aligned}\cos^2 z + \sin^2 z &= \left\{\frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}\right\}^2 + \left\{\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}\right\}^2 \\ &= \frac{\exp(2iz) + 2 + \exp(-2iz)}{4} - \frac{\exp(2iz) - 2 + \exp(-2iz)}{4} = 1 \quad (5.27)\end{aligned}$$

により証明できる。

sin$z$ と cos$z$ の零点

関数の値が 0 になる z をその関数の零点という。$\cos z$ の零点は、

$$\exp(iz) + \exp(-iz) = 0 \tag{5.28}$$

より、

$$\exp(2iz) = -1 = \exp\{i(2n+1)\pi\}\ (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \tag{5.29}$$

が得られるから、

$$z = \frac{2n+1}{2}\pi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\ (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \tag{5.30}$$

で与えられる。

一方、$\sin z$ の零点は、

$$\exp(2iz) = 1 = \exp(i2n\pi)\ (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \tag{5.31}$$

より、

$$z = n\pi\ (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \tag{5.32}$$

により与えられる。

sin$z$ と cos$z$ の関係

指数関数の性質を用いれば、

$$\exp\left\{i(z + \frac{\pi}{2}\right\} = \exp(iz)\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i\exp(iz), \quad \exp\left\{-i(z + \frac{\pi}{2}\right\} = -i\exp(-iz) \tag{5.33}$$

が得られるから、

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = i\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2} = -\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = -\sin z \tag{5.34}$$

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = i\frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2i} = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \cos z \tag{5.35}$$

という関係がある。これについては、実関数としても同じ性質であるから、すでに知っていると思う。

さらに、$n\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ ずらしたときにどうなるかをみておくことにしよう。

$$\exp\{\pm i(z+n\pi)\} = \exp(\pm iz)\exp(\pm in\pi) = (-1)^n\exp(\pm iz) \tag{5.36}$$

が得られるから、

$$\cos(z+n\pi) = (-1)^n\cos z, \quad \sin(z+n\pi) = (-1)^n\sin z \ \ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{5.37}$$

となる。

5.2.4 その他の三角関数

実関数でも tan や cot が定義されている。複素関数でも、同じ定義に従う。

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\tan z}, \quad \mathrm{sec} z = \frac{1}{\cos z}, \quad \mathrm{cosec} z = \frac{1}{\sin z}, \tag{5.38}$$

があるが、これらは、正則関数の商で出来ているから、分母が 0 になるところが特異点である。その特異点は全て１位の極である。また、無限遠点は、指数関数の真性特異点だから、これらの三角関数にとっても真性特異点になっている。

以下で、いくつかの性質を $\tan z$ に対してのみ示すことにする。それ以外の関数に対しては、ここで述べる $\tan z$ に対するやり方を参考にして各自やっておくこと。

tan$z$ の周期

任意の z に対して $\tan z = \tan(z+T)$ を満たす T を求める。

$$\begin{aligned}
&\frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{\exp(iz)+\exp(-iz)} = \frac{\exp\{i(z+T)\}-\exp\{-i(z+T)\}}{\exp\{i(z+T)\}+\exp\{-i(z+T)\}} \\
&\quad\Rightarrow\ \frac{\exp(2iz)-1}{\exp(2iz)+1} = \frac{\exp\{2i(z+T)\}-1}{\exp\{2i(z+T)\}+1} \\
&\quad\ \Rightarrow\ [\exp(2iz)-1][\exp\{2i(z+T)\}+1] = [\exp(2iz)+1][\exp\{2i(z+T)\}-1] \\
&\quad\ \ \Rightarrow\ \exp(2iz)[\exp(2iT)-1] = 0
\end{aligned} \tag{5.39}$$

となるから、

$$2iT = 2\pi in \ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \ \Rightarrow\ T = \pi n \ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{5.40}$$

が得られる。したがって、周期は π である。

tan$z$ の特異点

この関数は、正則関数の商で書けているから、分母の $\cos z$ が 0 になる点（$\cos z$ の零点）が特異点となる。これはすでに求まっていて、

$$z = \frac{(2n+1)\pi}{2} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{5.41}$$

が特異点である。

詳しくは、後で Taylor-Laurent 展開のところで述べることにするが、この特異点近傍の様子を調べればどのような特異点であるかが分かる。いま、$z = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi + w$ とおき、$|w|$ が小さい（$|w| \ll 1$）としよう。実際には、$w \to 0$ の極限が問題である。

$$\cos\left(z+\frac{\pi}{2}+n\pi\right) = (-1)^n\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = -(-1)^n\sin z \tag{5.42}$$

$$\sin\left(z+\frac{\pi}{2}+n\pi\right) = (-1)^n\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) == (-1)^n\cos z \tag{5.43}$$

であるから、

$$\tan z \;=\; \tan\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+w\right) = \frac{\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+w\right)}{\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+w\right)} = \frac{(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2}+w\right)}{(-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}+w\right)} = -\frac{\cos w}{\sin w} \tag{5.44}$$

が得られ、$\sin w$ と $\cos w$ に対して、$|w|$ が小さいときの展開式を用いると、

$$\tan z \;=\; -\frac{1-\frac{w^2}{2}+\cdots}{w\left(1-\frac{w^2}{3!}+\cdots\right)} \simeq -\frac{1}{w} \tag{5.45}$$

となるから、１位の極である。このように、特異点のまわりでは、Taylor 展開はできない。特異性を示す項が必要になる。このような項を含む展開を Laurent 展開と呼ぶが、これについては後述することにする。

5.3　双曲線関数

三角関数と双子のような関数が双曲線関数である。実関数の例は懸垂曲線であるから、力学で用いたと思う。統計力学にもよく現れる関数である。定義は、

$$\cosh z = \frac{\exp z + \exp(-z)}{2}, \quad \sinh z = \frac{\exp z - \exp(-z)}{2} \tag{5.46}$$

である。この定義からも明らかなように、三角関数とは、

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \sinh(iz) = i\sin z \tag{5.47}$$

の関係がある。

この関数も指数関数から派生した関数であり、三角関数との関係からも、周期が $2\pi i$ であることが分かる。また、特異点は無限遠点。（真性特異点）のみである。

双曲線関数もまた、三角関数同様、

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \quad \mathrm{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \mathrm{cosech} z = \frac{1}{\sinh z} \tag{5.48}$$

が定義される。これらの関数も、分母の零点が１位の極となることを各自確認すること。

5.4 対数関数

対数関数は、指数関数の逆関数として定義される。すなわち、

$$w = \log z \;\Leftrightarrow\; z = \exp w \tag{5.49}$$

である。

前にも見たように指数関数は $2\pi i$ を周期とする周期関数である。したがって、その逆関数である対数関数は、多価関数である。この多価性は、当然

$$\exp w = \exp(w + 2n\pi i)\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{5.50}$$

からきている。すなわち、偏角の取り方によっているのである。この多価性を適当に調節することにすると指数関数の性質

$$\exp(w_1 + w_2) = \exp w_1 \exp w_2 \tag{5.51}$$

を用いて、

$$\log(z_1 z_2) \;\;=\;\; \log z_1 + \log z_2 \tag{5.52}$$

が言える。

一般に複素数 z は、その絶対値と偏角により $z = |z| \exp(\mathrm{arg} z)$ と表されるから、

$$\log z \;\;=\;\; \log|z| + \log\{\exp(i\mathrm{arg} z)\} = \log|z| + i\mathrm{arg} z \tag{5.53}$$

となる。ここで、$|z|$ は実数である。以下では、実数の場合は、$\ln|z|$ と書くことにすると、

$$\log z \;\;=\;\; \ln|z| + i\mathrm{arg} z \tag{5.54}$$

である。偏角の場合、適当な定義により大文字を用いることにした。これに対応して、対数関数についても大文字を用いることにする。すなわち、

$$\mathrm{Log} z = \ln|z| + i\mathrm{Arg} z \tag{5.55}$$

と定義する。したがって、$\mathrm{Log} z$ の定義は、$\mathrm{Arg} z$ の定義に連動している。

5.4.1 対数関数の性質

対数関数の性質は、指数関数の逆関数であることを利用すると容易に導くことが出来る。

$$\exp(w_1 + w_2) = \exp w_1 \exp w_2 \quad\Rightarrow\quad \log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2, \tag{5.56}$$

$$\exp(-w) = \frac{1}{\exp w} \quad\Rightarrow\quad \log\frac{1}{z} = -\log z \tag{5.57}$$

がすぐに分かることである。これらから、n が整数の場合、

$$\log z^n = n \log z \tag{5.58}$$

という性質がでてくる。

ただし、ここで挙げた公式は、虚部（$\mathrm{arg} z$ で与えられる）を適当に処理するものとして成り立つことであり、注意を要する。

5.4.2　対数関数の微分

対数関数は指数関数の逆関数であるから、逆関数の微分をとればよい。

$$w = \log z \;\Rightarrow\; z = \exp w \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}} = \frac{1}{\exp w} = \frac{1}{z} \tag{5.59}$$

となる。すなわち、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log z = \frac{1}{z} \tag{5.60}$$

である。

5.4.3　分岐点と Riemann 面

対数関数は $\log z$、図のように原点のまわりを１周すると $2\pi i$ だけ値が変わる。このようにその点のまわりを１周したときに関数の値が変わるような特異点を「分岐点」という。$w = \log z$ の場合、$z = 0$ が分岐点である。このように分岐点は、多価関数に現れる。

対数関数の場合、無限遠点も分岐点である。このことは、$\zeta = 1/z$ とすると、

$$\log \zeta = \log \frac{1}{z} = -\log z \tag{5.61}$$

により、$\zeta \to 0$ の性質と、$z \to 0$ の性質が同じであることにより分かる。

このような多価関数に対してどの値をとるべきかを示す方法に、Riemann 面という概念がある。これを対数関数を例にとって説明する。いま、Arg$z$ の定義として、$0 \leq \mathrm{Arg}z < 2\pi$ として話を進めることにする。この定義に従って、Log$z$ を考えると、原点周りに１周したとき $2\pi i$ だけ値が変わってしまうから、$a > 0$ として、

$$\lim_{\eta\to+0} \mathrm{Log}(a - i\eta) = \lim_{\eta\to+0} \mathrm{Log}(a + i\eta) + 2\pi i \tag{5.62}$$

となり、実軸の正側で関数が不連続になってしまう。そこで、Gauss 平面が何枚も（実際には無限枚）重なっていて、n 枚目の面では虚部が、

$$2\pi n \leq \mathrm{Im}\log z < 2\pi(n+1) \tag{5.63}$$

になると考えるのである。（n は、0 も負の整数も含むとするから、n 枚目という言い方は少しおかしいが、ここでは、そのように表現することにする。）この Riemann 面を乗り移ることによって $\log z$ が連続になるように考える。こうすれば、微分が実軸上正側でも定義できるようになる。この様子を図示したのが、図 5.2 である。

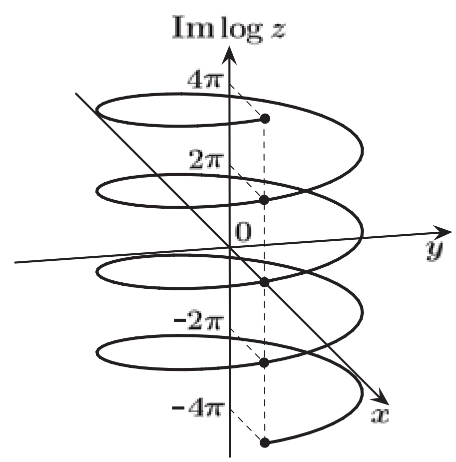

図　5.2:　Riemann　面の概念図。Gauss 平面を斜めに見て、上下の軸に Im$\log z$ をとってある。実際には、Gauss 平面上で原点を中心として円を描いているものとした。

対数関数は、その虚部が 2π の整数倍不定である。すなわち、区別すべき値が無限にある。したがって、必要な Riemann 面は無限枚である。無限多価関数に必要な Riemann 面は無限枚である。

切断

今までの例は、Riemann 面の乗り移りが、実軸上の正の所でおこるるとした。しかし、これが唯一ではない。偏角 Arg$z$ の定義としてどうとるかによっているのである。この取り方の指定は「切断」をどこにとるか指定すれば決まることである。この「切断」は、Riemann 面を乗り移る位置を示している者と思えばよい。物理をやる人は標準的には実軸上負の側にとる。その取り方は、

$$-\pi < \mathrm{Arg} z \leq \pi \tag{5.64}$$

ととったことに対応しており、実軸上正側では Log$z$ は連続である。

切断には特殊な性質がある。よく考えてみれば分かるように、分岐点は一周したときに値が変わるのだから、もう一つそのような点があって、円の半径を大きくしていってもう一つの点を超えない限り、この不連続は解消されないはずである。すなわち、切断は分岐点と分岐点を結んでいなければならない。

対数関数の場合、そのもう一つの分岐点は無限遠点であると述べた。すなわち、$\log z$ の切断は、原点と無限遠点を結んでいれば良く、したがって、どの方向に入れても構わないのである。

5.5 ベキ関数

初等関数の最後にベキ関数 z^p について考える。ここでは、p も一般に複素数とする。ベキ関数は、指数関数と対数関数を用いて

$$z^p = \exp(p \log z) \tag{5.65}$$

により定義する。p が整数の場合は

$$\exp(p \log z) = \exp(\log z^p) = z^p \tag{5.66}$$

となるから明らかであるが、p が一般の複素数でもこれを定義とする。

5.5.1 ベキ関数の微分

微分は

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}z^p}{\mathrm{d}z} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\exp(p\log z) = p\frac{\mathrm{d}\log z}{\mathrm{d}z}\exp(p\log z) = p\frac{1}{z}\exp(p\log z) \\ &= p\exp(-\log z)\exp(p\log z) = p\exp\{(p-1)\log z\} = pz^{p-1} \end{aligned} \tag{5.67}$$

である。

5.5.2 ベキ関数の多価性

対数関数は無限多価関数であるから、ベキ関数も多価関数になることがあり得る。（いつもではない！）$\log z = \ln|z| + i\mathrm{arg} z$ であるから、

$$w = z^p = \exp(p\log z) = \exp\{p\ln|z| + ip\mathrm{arg} z\} \tag{5.68}$$

となる。
いま、ベキ p が

$$p = \alpha + i\beta \tag{5.69}$$

と書けているとすると、

$$\begin{aligned} w &= \exp\{(\alpha+i\beta)\ln|z| + i(\alpha+i\beta)\mathrm{arg}z\} \\ &= \exp\{\alpha\ln|z| - \beta\mathrm{arg}(z) + i(\beta\ln|z| + \alpha\mathrm{arg}z)\} \end{aligned} \tag{5.70}$$

となる。この式を見ても分かると思うが、多価性は p により変わる。以下でどのようになるか見ていくことにする。

$\beta \neq 0$ の場合

この場合は、$\beta\mathrm{arg}(z)$ という項が指数関数の引数に入っているから、$\exp\{-\beta\mathrm{arg}(z)\}$ は arg の取り方によりいくらでも変わる。したがって、 $\beta \neq 0$ の場合には、無限多価関数である。

$\beta = 0$ の場合

この場合は、p が実数であるが、

$$w = = \exp(\alpha\ln|z| + i\alpha\mathrm{arg}z) = \exp(\alpha\ln|z|)\exp(i\alpha\mathrm{arg}z) = |z|^\alpha\exp(i\alpha\mathrm{arg}z) \tag{5.71}$$

と書ける。問題は、この後ろの項であるが、さらに、α をさらに細かく見ないといけない。

無理数の場合 この場合は、$\alpha\mathrm{arg}z$ は 2π の整数倍になることはないので、$\exp(i\alpha\mathrm{arg}z)$ が 1 になることはない。したがって、無限多価関数である。

有理数の場合 この場合は、α は整数の比で書ける。すなわち、

$$\alpha = \frac{\ell}{m} \quad (\ell,\ m\,\text{は整数}) \tag{5.72}$$

と既約分数で書ける。したがって、$\mathrm{arg}z = \mathrm{Argz} + 2\pi n$ とすると、

$$\exp(i\alpha\mathrm{arg}z) = \exp\left\{i\frac{\ell}{m}(\mathrm{Arg}z + 2\pi n)\right\} = \exp\left\{i\frac{\ell}{m}\mathrm{Arg}z\right\}\exp\left\{i2\pi\frac{\ell n}{m}\right\} \tag{5.73}$$

と書き換えて見ればわかるように、n が m の整数倍の時、最後の項が 1 となり、異なる w の値を与えるのは、$n = 0, 1, \cdots, m-1$ の m 通りと言うことになる。すなわち、m 価関数である。この場合は、m 個の値を区別する必要があるから、m 枚の Riemann 面が必要である。

整数の場合 この場合は、前のケースで $m = 1$ であると思えばよい。したがって、 1 価関数である。特に Riemann 面を考える必要はない。

第6章　複素関数の積分

今まで微分を取り扱ってきたが、物理数学への応用としては、複素関数の積分も非常に重要な道具立てである。

6.1　定積分

１変数の実関数の場合、a から b までの積分と言えば、数直線に沿っての積分となるから、積分可能な関数ならば定積分の値は決まる。しかし、複素関数の場合、a から b までの定積分といっても、Gauss 平面上の点 a から Gauss 平面上の点 b までの積分だから、その積分径路によるかも知れない。

まず、記号の説明と定義から始める。関数 $f(z)$ を a から b まで径路 C に沿って積分した結果を

$$\int_{a(C)b} f(z)\mathrm{d}z, \quad \int_C f(z)\mathrm{d}z \tag{6.1}$$

と書く。後ろの書き方は、始点 a と終点 b は当然、径路 C の定義に含まれているはずだから、書かなくても分かることを意味している。 すなわち、

その定義は、基本的には実関数の積分と同じである。右図を参照しながら読むこと。まず、径路 C を N 個の部分に分割する。この分割は $N \to \infty$ の極限（後でとる）で、全ての部分区間の長さが 0 になるようになっていなければならない。この区間分割する点を z_n $(n = 1, \cdots, N-1)$ とし、両端の点を $z_0 = a$, $z_N = b$ と書くことにする。こうすると $n-$ 番目の区間は $[z_{n-1}, z_n]$ と言うことになる。

次に、$n-$ 番目の区間の代表点を ζ_n とする。この代表点は $n-$ 番目の区間内なら何処でも良い。ここで、和

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} f(\zeta_n)\Delta z_n \ (\Delta z_n = z_n - z_{n-1}) \tag{6.2}$$

を定義し、この分割数 $\to \infty$ の極限をとる。この極限が存在すれば、それを定積分の定義とする。

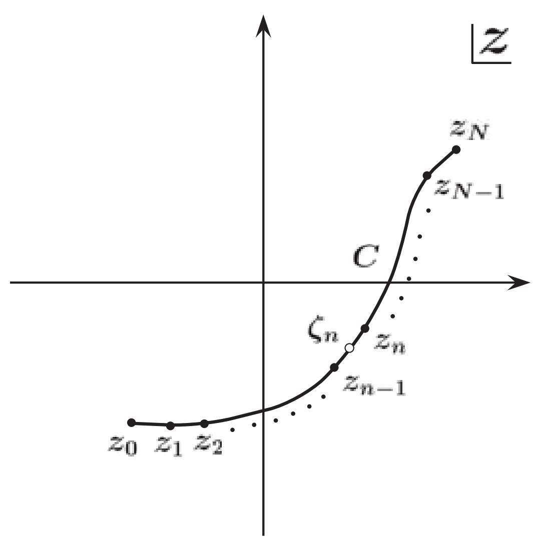

図 6.1: a から b まで径路 C に沿って積分する定積分の定義に用いる分割と代表点。

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f(\zeta_n)\Delta z_n \tag{6.3}$$

である。

6.1.1 積分径路の分割と逆向き径路

定義をみればすぐに分かると思うが、C と逆向きの径路（$\bar{C}$ と書く）に沿った積分は、符号が変わる。それは、分割点が $n \leftrightarrow N-n$ と入れ替わる（順番が入れ替わる）からである。すなわち、

$$\Delta z_n \leftrightarrow -\Delta z_{N-n} \tag{6.4}$$

という入れ替えがおこる。したがって、

$$\int_{\bar{C}} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\mathrm{d}z \tag{6.5}$$

である。 次に、a と b の間に c を考えて、径路 C が C_1 と C_2 に分割されている場合を考え

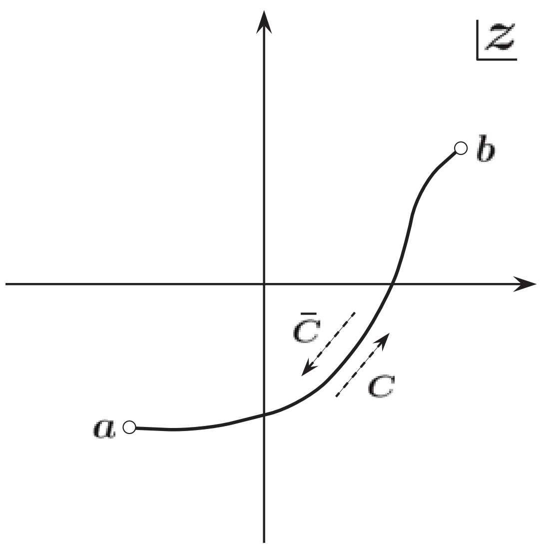

図 6.2: 逆向きの積分。

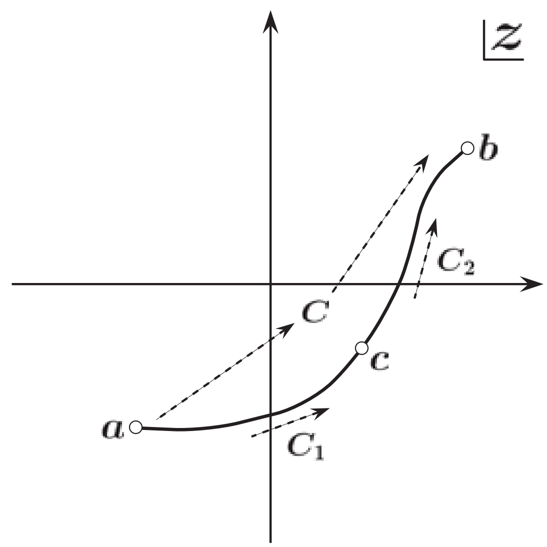

図 6.3: 積分径路の分割。

よう（$C = C_1 + C_2$）。これも、積分の定義で極限をとる前のことを考えれば、和でできているから明らかであろう。当然

$$\int_{a(C)b} f(z)\mathrm{d}z = \int_{a(C_1)c} f(z)\mathrm{d}z + \int_{c(C_2)b} f(z)\mathrm{d}z = \left(\int_{C_1}\mathrm{d}z + \int_{C_2}\mathrm{d}z\right) f(z) \tag{6.6}$$

である。（後ろは簡略化した書き方である。）

これらは積分の定義が実関数と同じで、関数の値と z の変化 Δz の積の和で出来ていることによっている。したがって、$z = x + iy$ のように実部と虚部に分けて考えれば、$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ であり、この辺過分の無限小極限は、$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$ である。したがって、積分径路が実軸に平行ならば、$\mathrm{d}y = 0$ であり、虚軸に平行ならば、$\mathrm{d}x = 0$ である。また、$z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ として、$r \to r + \mathrm{d}r,\, \theta \to \theta + \mathrm{d}\theta$ のように変化させれば、$z \to z + \mathrm{d}z = (r + \mathrm{d}r)\mathrm{e}^{i(\theta+\mathrm{d}\theta)} = (r + \mathrm{d}r)\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\mathrm{d}\theta}$

と変化する。ここで、$\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$ はすべて無限小と考えればよいから、すべて１次まで残せばよい。すると、

$$\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}r + ir\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta \tag{6.7}$$

となることが分かる。したがって、原点を中心とする円周上の積分の場合には、$\mathrm{d}r = 0$ であり、原点から偏角を変えずに半径に沿っての積分ならば、$\mathrm{d}\theta = 0$ として積分すればよいことが分かる。

6.1.2　定積分は径路による？

複素関数の場合、a から b までの定積分といっても、Gauss 平面上の点 a から Gauss 平面上の点 b までの積分だから、その積分径路によるかも知れない。右図で、径路 C_1 に沿った積分 $\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z$ と径路 C_2 に沿った積分 $\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$ が異なるかもしれない。このことを以下で２つの例をあげて見てみることにする。

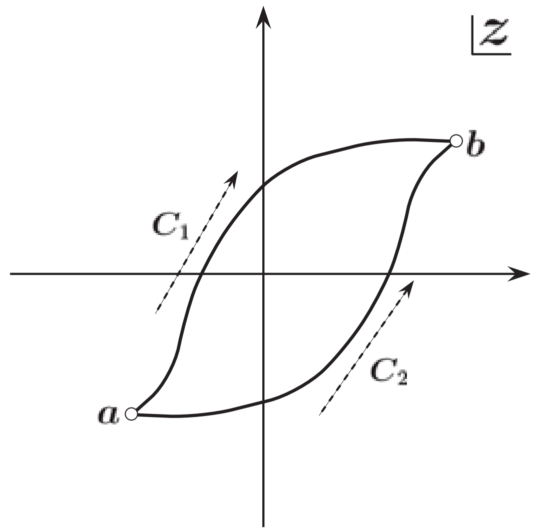

図 6.4: a から b までの２種類の径路。

例１ 被積分関数 $f(z) = 1$ の場合
この場合は積分径路によらない答えとなる。関数の値は常に 1 であるから、

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \Delta z_n = \sum_{n=1}^{N} (z_n - z_{n-1}) \\ &= (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \cdots + (z_N - z_{N-1}) = z_N - z_0 = b - a \end{aligned} \tag{6.8}$$

となり、$N \to \infty$ の極限をとっても変わらない。したがって、径路 C によらず、

$$\int_{a(C)b} \mathrm{d}z = b - a \tag{6.9}$$

である。

例２

1) 積分径路が c_1 と c_2 の２個で出来ているから、それぞれに分けて積分し、その結果を加えればよい。径路 c_1 は実軸に平行だから、$\mathrm{d}y = 0$ である。また、$f(z) = x$ となるから、したがって、

$$\int_{c_1} f(z)\mathrm{d}z \;=\; \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \tag{6.10}$$

被積分関数を $f(z)=\dfrac{1}{2}(z+z^*)$ として、0 から $1+i$ まで積分するが、径路として

1.$C_1 = c_1(0\to 1)+c_2(1\to 1+i)$

2.$C_2 = c_3(0\to i)+c_4(i\to 1+i)$

3.$C_3(0\to 1+i)$

の 3 種類を考える。ここで、$\to$ は直線で結ぶものとする（右図参照）。

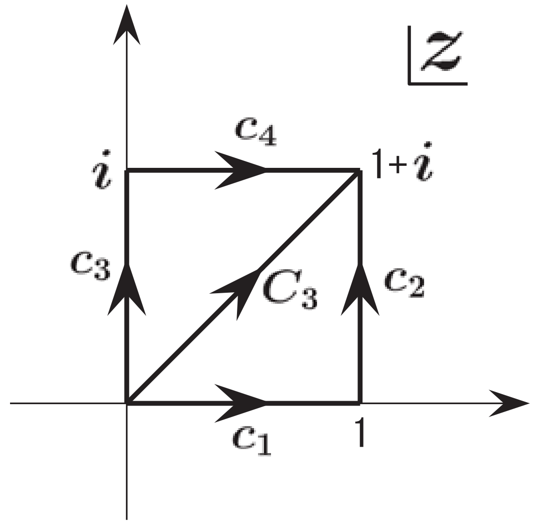

図 6.5: 例 2 の積分径路。

である。つぎに、c_2 上では、 $x=1$ であり、$\mathrm{d}x=0$ であるから、

$$\int_{c_2} f(z)\mathrm{d}z \;=\; \int_0^1 1\times i\mathrm{d}y = i \tag{6.11}$$

となる。したがって、

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z \;=\; \frac{1}{2}+i \tag{6.12}$$

となる。

2) この積分も 2 個の径路で出来ているから、各径路の積分結果を加えればよい。

$$\int_{c_3} f(z)\mathrm{d}z \;=\; \int_0^1 0\times i\mathrm{d}y = 0 \tag{6.13}$$

であり、

$$\int_{c_4} f(z)\mathrm{d}z \;=\; \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \tag{6.14}$$

だから、

$$\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z \;=\; \frac{1}{2} \tag{6.15}$$

となる。

3) この積分径路は、$y=x$ という直線上だから、$x=y=t$ とおけば、t という 1 個の変数を変化させればよい。変数 t の変化する区間は、$[0,1]$ である。無限小変化は $z=x+iy=(1+i)t$ であるから、$\mathrm{d}z=(1+i)\mathrm{d}t$ で与えられる。したがって、

$$\int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z \;=\; \int_0^1 t(1+i)\mathrm{d}t = \frac{1+i}{2} \tag{6.16}$$

となる。

この例は、定積分が、積分径路によって変わる例である。

ここで見たように、定積分の値が積分径路による場合とよらない場合がある。実際には、例 1 は正則関数の例で、例 2 は Gauss 平面上いたるところ特異点となっている関数である。

6.2 Cauchy の積分定理

「正則関数の積分は径路によらない」ことを示しているのが、Cauchy の積分定理である。ここでは関数が単連結領域で定義されているとして話を進める。単連結領域とは、領域内部を通る閉曲線を考えたとき、その領域を出ることなしに閉曲線のサイズを０にまで（すなわち点になるまで）変更できる領域のことを言う。

Cauchy の積分定理とは、「Gauss 平面上に閉曲線 C があり、この周上および内部で正則な関数 $f(z)$ の C に沿って１周する積分は 0 である。」というものである。以下で、これを証明する。用いるのは、Cauchy-Riemann 方程式と、２変数実関数の面積分と、その周上の線積分を結びつけている Stokes の定理である。

その前に、閉曲線上を１周する向きの正負を定義しておく。定義は、偏角の正負と同じで、その内部を「左に見ながら進行する向きを正の向き」、「右に見ながら進行する向きを負の向き」と定義する。別の言い方をすれば、「反時計回り (counter-clockwise) が正」、「時計回り (clockwise) が負」である。

6.2.1 Cauchy の積分定理の証明

まず、Green の定理は、２変数実関数 $F(x, y)$ に対して、

$$\int\int_E \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_C F\mathrm{d}y, \quad \int\int_E \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\oint_C F\mathrm{d}x \tag{6.17}$$

$$\mathrm{Re}I = \oint_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y), \quad \mathrm{Im}I = \oint_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) \tag{6.20}$$

となる。ここで Green の定理を適用すると、

$$\mathrm{Re}I = -\int\int_E (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \mathrm{Im}I = \int\int_E (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.21}$$

となるが、正則関数が満たす Cauchy-Riemann の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{6.22}$$

を考えれば、どちらも 0 となる。したがって、

$$I \;\; = \;\; \oint f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{6.23}$$

である。

6.2.2 Cauchy の積分定理の応用

Cauchy の積分定理を用いると、正則関数の積分が径路によらないことが分かる。図 6.4 で、径路 C_2 の逆向きの径路 $\bar{C}_2$ を考え、$C = C_1 + C_2$ とすると、C は閉曲線となり、正の向きの１周積分となる。この周上および内部で $f(z)$ が正則であれば、Cauchy の積分定理により、１周する積分は 0 になるから、

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\bar{C}_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{6.24}$$

と書ける。ただし、ここで、C は閉曲線、E は C で囲まれる領域を表す（右図参照）。関数 F は、C 上およびその内部 E で微分可能であるとする。また、$\oint$ は周上を１周する積分を表すが、ここでは、正の向きの線積分である。（ただし、無限小変化は、y または x に対してとっていることに注意せよ。）この $\oint$ という書き方は、複素積分に対しても用いる。（向きの正負は、径路 C の定義で与える。）これら２式の左辺は面積分で、右辺は線積分である。この線積分は１周するのだからどこから始めても構わない。（始点も終点も同一点である。）

今、積分

$$I = \oint f(z)\mathrm{d}z \tag{6.18}$$

を考える。被積分関数 $f(z)$ を実部と虚部にわけて、

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{6.19}$$

と書けば、$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$ と書けるから、I の実部と虚部は、

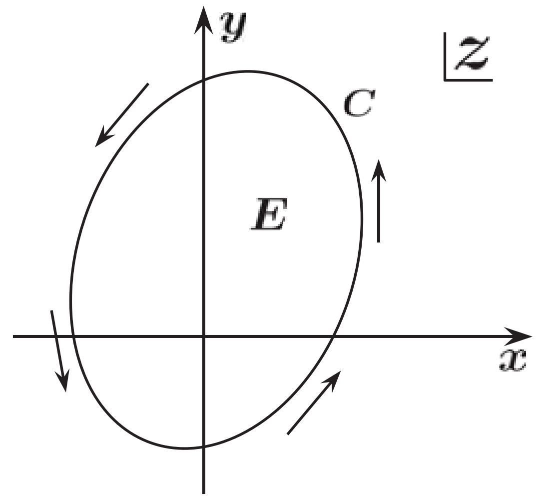

図 6.6: 閉曲線 C とそれで囲まれた領域 E。

が得られる。したがって、

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z \tag{6.25}$$

である。これは、正則な関数を積分するときには、積分径路を変更しても良いことを示している。すなわち、関数の正則領域ならば、積分径路を変更しても良い。しかし、特異点を越えるような径路変更をすると、C の内部に特異点が入ってしまい、Cauchy の積分定理が使えなくなる。すなわち、積分径路の変更は特異点を越えたら積分の値が変わるのである。この例が前に挙げた例２である。例２の関数は Gauss 平面上いたるところ特異点なので、径路が変われば、値が変わったのである。特異点の周りの積分は、後で考えることにして、次に不定積分について考えよう。

6.3　不定積分

ここでは、被積分関数の正則領域に限って考えることにする。前節で見たように、正則関数の定積分は、始点と終点を与えれば決まり、径路によらない。したがって、

$$F_a(b) = \int_{a(C)b} f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(z)\mathrm{d}z \tag{6.26}$$

のように、径路を書かずに始点と終点という意味で、積分の下限・上限の様な書き方をしても構わない。今、始点は a に固定したとして、正則領域内で終点 b は動かせる。一般の複素数 z

までの積分を考えると、$F_a(z)$ が z の関数として求まる。それを

$$F_a(z) = \int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{6.27}$$

と書くことにする。

この新たに出来た関数 $F_a(z)$ を微分する。微分の定義に従うと、

$$\frac{\mathrm{d}F_a(z)}{\mathrm{d}z} = \lim_{h\to 0}\frac{F_a(z+h) - F_a(z)}{h} \tag{6.28}$$

であるが、関数の正則領域内だけ考えているから、a から $z+h$ までの積分を、a から z までの径路と z から $z+h$ までの径路の和と考えて、

$$F_a(z+h) = \int_a^{z+h} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_z^{z+h} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = F_a(z) + \int_z^{z+h} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{6.29}$$

が得られる。したがって、

$$\Delta F_a = F_a(z+h) - F_a(z) = \int_z^{z+h} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{6.30}$$

である。ここで、積分径路が直線であるとすると、$\zeta = z + ht$ とおき、積分変数を t にすると、$\mathrm{d}\zeta = h\mathrm{d}t$ であるから、

$$\Delta F_a = h\int_0^1 f(z+ht)\mathrm{d}t \tag{6.31}$$

となる。ここで、$0 \le t \le 1$ だけで考えているから、h が無限小の時 ht も無限小であり、$f(z+ht) = f(z)$ と置き換えても差し支えない。したがって、

$$\frac{\mathrm{d}F_a(z)}{\mathrm{d}z} = \lim_{h\to 0}\int_0^1 f(z+ht)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z)\mathrm{d}t = f(z) \tag{6.32}$$

である。すなわち、微分したら $f(z)$ になる。ところで、始点を c に変更したら、

$$F_c(z) = F_a(z) + \int_c^a f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{6.33}$$

であり、$F_a(z)$ とは定数 $\int_c^a f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ だけ異なる。この始点の変更による定数の違いは、（定数を微分しても 0 になるから、）どうでも良いとし、不定のまま考えたものが、不定積分である。それを単に $F(z)$ で表す。従って、

$$F(z) = \text{微分して } f(z) \text{ となる関数} \ + \ \text{不定な定数} \tag{6.34}$$

という関数である。

この不定積分を用いれば、正則関数の定積分は、

$$\int_a^b f(z)\mathrm{d}z = \int_c^b f(z)\mathrm{d}z - \int_c^a f(z)\mathrm{d}z = F_c(b) - F_c(a) \tag{6.35}$$

となるから、実関数と同様、

$$\int_a^b f(z)\mathrm{d}z = F(b) - F(a) \tag{6.36}$$

と書ける。すなわち、微分して $f(z)$ となる関数 $F(z)$ を探して、その終点における値 $F(b)$ から始点における値 $F(a)$ を引けばよい。

- 例：　$f(z) = z$（複素平面上いたるところ正則）を始点 a から終点 b まで積分すれば、不定積分は $\dfrac{1}{2}z^2$ だから、

$$\int_a^b z\mathrm{d}z = \frac{b^2 - a^2}{2} \tag{6.37}$$

である。

6.4　極の周りの周回積分と留数

前節では、正則関数を閉曲線に沿って１周する積分すると、０となること、および、それを利用すると正則領域では積分経路を変更しても結果が変わらないことを見てきた。では、閉曲線内部にが特異点があったらどうなるのかを見ることにしよう。

6.4.1　１位の極の周りの周回積分

１価関数の場合、特異点は極か真性特異点である。ここでは、極を取り上げる。とりあえず、１位の極の周りを（正の向きに）１周したらどうなるかを見る。点 $z = a$ に１位の極をもつ最も簡単な関数は

$$f(z) = \frac{1}{z - a} \tag{6.38}$$

である。この関数を $z = a$ を中心とする半径 r の円周上で正の向きに１周積分してみよう（右図参照）。図に示したように、変数 θ を定義すると、$z = a + r\mathrm{e}^{i\theta}$ と表され、式 (6.7) を用いると、半径 r が定数であるから、$\mathrm{d}z = ir\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ となる。したがって、

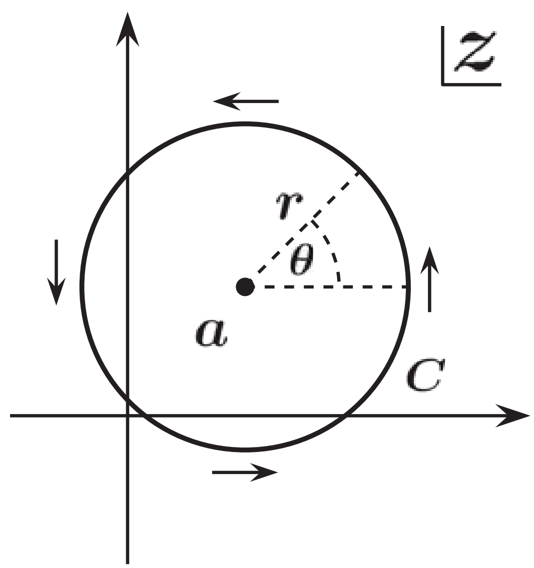

図 6.7: $z = a$ の周りの半径 r の円周上の積分。

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z - a} = \int_0^{2\pi} \frac{ir\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{r\mathrm{e}^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} i\mathrm{d}\theta = 2\pi i \tag{6.39}$$

となる。正の向きに１周すると $2\pi i$ となることを覚えておいて欲しい。

6.4.2 2位の極の周りの周回積分

では、2位の極のまわりを1周したらどうなるかを見よう。計算の仕方は1位の極のときと同じである。ここでは、$\dfrac{1}{(z-a)^2}$ としてやってみる。前と同じ変数変換を使って、

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{ir\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{r^2\mathrm{e}^{2i\theta}} = \frac{i}{r}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{d}\theta \tag{6.40}$$

となるが、Euler の公式を用いると、θ に関する積分は、

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}(\cos\theta - i\sin\theta)\mathrm{d}\theta \tag{6.41}$$

となって、実部・虚部ともに1周期の積分だから0になる。結局、

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^2} = 0 \tag{6.42}$$

となる。

この計算の仕方を拡張して、$m \geq 2$ となる整数 m に対する計算をすると、

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^m} = \int_0^{2\pi} \frac{ir\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{r^m\mathrm{e}^{mi\theta}} = \frac{i}{r^{m-1}}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-(m-1)i\theta}\mathrm{d}\theta = 0 \tag{6.43}$$

となって、1位の極の場合だけが0にならず、2以上の m 位の極に対しては、全て0となることが分かる。

6.5 留数定理

いままでは、単純な $(z-a)^{-m}$ （m は正の整数）という関数を考えてきた。こんどは、

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m}\ (f(z)\ \text{は、考えている領域で正則で、}f(a)\neq 0\,) \tag{6.44}$$

という関数の $z=a$ のまわりの周回積分を考えよう。この $g(z)$ は、$z=a$ に m 位の極を特異点としてもっている。

ところで、指数関数は、新たに整級数で表した。整級数で定義した関数は、収束半径の内部では、何階でも微分可能で、その微分は項別微分して得ることができる。この表現を原点 $(z=0)$ の周りの Taylor 展開と解釈すると、その中心となる点が $z=a$ であっても、構わないはずである。このことは、指数関数を例に取って次のように変形すると良く分かる。

$$\begin{aligned}\exp z &= \exp\{a+(z-a)\} = \exp a\exp(z-a) \\ &= \exp a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left.\frac{\mathrm{d}\exp z}{\mathrm{d}z}\right|_{z=a}(z-a)^n}{n!}\end{aligned} \tag{6.45}$$

このことは、用意に一般化できて、$z=a$ で正則な関数は、$(z-a)$ の整級数で書け、$z=a$ のまわりの収束円内部では、絶対収束し、何度でも微分可能で、その微分は、項別微分して得られるはずである。すなわち、$z=a$ で正則な関数は、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{6.46}$$

とかけ、

$$\frac{\mathrm{d}^m f(z)}{\mathrm{d}z^m} = \sum_{n=m}^{\infty}\{n(n-1)\cdots(n-m+1)c_n(z-a)^{n-m}\}$$
$$= \sum_{n=m}^{\infty}\{\frac{n!}{(n-m)!}c_n(z-a)^{n-m}\} \tag{6.47}$$

で与えられる。ここで、$z=a$ とおくと、$n>m$ の項は、全て0になるから、

$$f^{(m)}(a) = = m!c_m \tag{6.48}$$

となる。したがって、

$$c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \tag{6.49}$$

が得られる。これが、Taylor 展開で、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)(z-a)^n}{n!} \tag{6.50}$$

ということになる。

これを用いると、$g(z)$ の $z=a$ のまわりの正の向きの周回積分は、

$$\oint_C g(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty}\oint_C \frac{f^{(n)}(a)(z-a)^{n-m}}{n!}\mathrm{d}z \tag{6.51}$$

となるが、$n-m=-1$ すなわち、$n=m-1$ の項だけが残って、その係数は、$f^{(n)}(a)/(m-1)!$ だから、

$$\oint_C g(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\frac{f^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} \tag{6.52}$$

となる。

このように、極のまわりの積分は、$2\pi i\times(z=a$ で決まる定数$)$ により与えられる。この $z=a$ で決まる定数を**留数**といい、$\mathrm{Res}[g(z);a]$ または、単に $\mathrm{Res}[a]$ と書く。したがって、留数とは、極に対して定義され、

$$\mathrm{Res}[g(z);a] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C g(z)\mathrm{d}z \tag{6.53}$$

のことである。ただし、積分径路 C は、極のまわりを正の向きに1周する径路で、その閉曲線の内部に $z=a$ 以外の特異点を含まないものとする。

閉曲線 C の中に複数個の極 $z=a_i$ $(i=1,\cdots,n)$ があり、それ以外は正則であれば、図6.8を見れば分かるように、正則領域では積分径路を変形しても良いから、各極のまわりの周回積分にまで変形できることになる。ただし、逆向きの積分の和は0になるので、積分径路から落とすことが出来ることに注意せよ。したがって、積分結果は、各留数の和の $2\pi i$ 倍になる。すなわち、

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z);a_i] \tag{6.54}$$

である。

以上が、留数定理と言われる定理で、実関数の積分といえども、この定理の恩恵を被ることによりできるものがある。

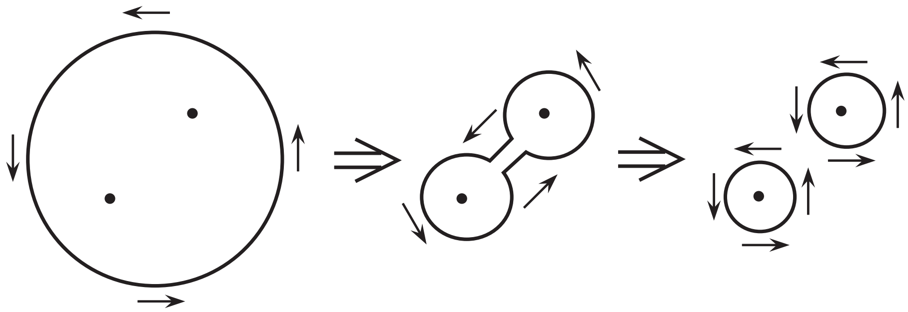

図 6.8: 閉曲線内部に 2 個の極が存在する場合の径路の変形。

6.5.1　留数の求め方

留数の求め方は、上の説明から明らかであろう。関数 $f(z)$ が $z=a$ に極をもち、もし、

$$\lim_{z\to a}\{(z-a)^m f(z)\} \tag{6.55}$$

が 0 でなく、有限な値であれば、

$$\mathrm{Res}[f(z);a] \;=\; \frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\{(z-a)^m f(z)\} \tag{6.56}$$

である。

6.6　Laurent 展開

ここでは、1 価関数についてだけ考える。したがって、孤立特異点は極であるとする。$z=a$ に極があるとしてその近傍のみを考えると、以下のように書けるはずである。

$$1\,位の極 \;\Rightarrow\; \frac{A}{z-a},\quad 2\,位の極 \;\Rightarrow\; \frac{A}{(z-a)^2},\quad 3\,位の極 \;\Rightarrow\; \frac{A}{(z-a)^3},\quad \cdots \tag{6.57}$$

となっているはずである。もう少し、詳しく書くと、「正則な」関数 $g(z)$ $(g(a)\neq 0$ を使って、

$$1\,位の極 \;\Rightarrow\; \frac{g(z)}{z-a},\quad 2\,位の極 \;\Rightarrow\; \frac{g(z)}{(z-a)^2},\quad 3\,位の極 \;\Rightarrow\; \frac{g(z)}{(z-a)^3},\quad \cdots \tag{6.58}$$

のように書けるはずである。とすれば、$g(z)$ は $z=a$ のまわりで Taylor 展開できるから、

$$g(z)=\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell (z-a)^\ell \tag{6.59}$$

と Taylor 展開できるから、$z=a$ に m 位の極をもつ関数 $f(z)$ は、

$$\begin{aligned} f(z) \;&=\; \frac{g(z)}{(z-a)^m} = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell (z-a)^{\ell-m} = \sum_{n=-m}^{\infty} a_{n+m}(z-a)^n \\ &=\; \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+m}(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z-a)^n = \sum_{j=1}^{m}\frac{a_{j+m}}{(z-a)^{|j|}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z-a)^n \end{aligned} \tag{6.60}$$

と書けることになる。これが Laurent 展開で、指数が負になっている項の和を Laurent 展開の主要部という。

ここで、主要部が、無限項の和（$m=\infty$）になっている場合、その特異点は、真性特異点と呼ばれる。この例は、$\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ の特異点 $z=0$ で、

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n} \tag{6.61}$$

となり、Laurent 展開の主要部が無限項からで来ている。したがって、$\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ において $z=0$ は、真性特異点であり、また、$\exp z$ に対しては、$z=\infty$ が真性特異点である。

6.7 留数定理の実関数積分への応用

ここでは、問題とその解答という形で例を挙げることにより、いかに留数定理が実関数の積分へ応用できるかを示すことにする。

6.7.1 例１

〔問題〕 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta-a}$ を求めよ。

〔解答〕 a が $-1\le a\le 1$ を満たす実数の場合には、明らかに積分はできない。したがって、a はそれ以外の数とする。積分変数を $z=\mathrm{e}^{i\theta}$ とすると、

$$\mathrm{d}z=i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta=iz\mathrm{d}\theta \;\Rightarrow\; \mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz} \tag{6.62}$$

および

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{6.63}$$

が得られる。また、z に対する積分径路は、原点を中心とする半径１の円を正の向きに１周する閉曲線となる。この径路を C として、

$$I \;=\; \oint_C\frac{2\mathrm{d}z}{iz\left(z+\frac{1}{z}-2a\right)}=-2i\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z^2-2az+1} \tag{6.64}$$

となる。積分径路 C が閉曲線であり、被積分関数は分数関数で特異点は極であるから、留数を求める。まず、分母が０になるところを求めると、

$$z=a\pm(a^2-1)^{1/2} \tag{6.65}$$

が得られる。ただし、$w^{1/2}$ は２価関数であるから、１枚目の Riemann 面上の値をとるものとし、虚部が 0 以上になるものとした。

ところで、この２個の解の積は１だから、それらの絶対値の積も１である。すなわち、１個の解は積分径路である閉曲線の外にあり（その解を z_{o} と書くことにする）、１個が中にある（その解を z_{i} と書くことにする）。したがって、

$$I \;=\; =-2i\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_{\mathrm{i}})(z-z_{\mathrm{o}})} \tag{6.66}$$

となるが、$z = z_\mathrm{i}$ が閉曲線内部の極となる。これは、１位の極だから、

$$I \quad = \quad = \frac{4\pi}{(z_\mathrm{i} - z_\mathrm{o})} \tag{6.67}$$

である。

　この結果に具体的数字を入れてみると、

例１－１：$a = 2$ の場合

　この場合、

$$z_\mathrm{i} = 2 - \sqrt{3}, \quad z_\mathrm{o} = 2 + \sqrt{3} \;\Rightarrow\; z_\mathrm{i} - z_\mathrm{o} = -2\sqrt{3} \tag{6.68}$$

である。よって、

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta - a} = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \tag{6.69}$$

である。

例１－２：$a = i/2$ の場合

　この場合、極の位置は、

$$z_\pm = \frac{i}{2} \pm \left\{ \left(\frac{i}{2}\right)^2 - 1 \right\}^{1/2} = \frac{i}{2} \pm \left\{ -\frac{5}{4} \right\}^{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} i \tag{6.70}$$

であるから、

$$z_\mathrm{i} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} i, \quad z_\mathrm{o} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} i \;\Rightarrow\; z_\mathrm{i} - z_\mathrm{o} = -\sqrt{5} i \tag{6.71}$$

である。よって、

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta - \frac{i}{2}} = \frac{4\pi}{\sqrt{5}} i \tag{6.72}$$

である。

6.7.2　例２

〔問題〕 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 1}$ を求めよ。

〔解答〕 無限区間の積分であるが、まず゜有限区間 $-R$ から R までの積分とし、最後に $R \to \infty$ の極限をとることにする。すなわち、

$$I = \lim_{R\to\infty} I_R = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 1} \tag{6.73}$$

とする。

この積分を、複素平面上の積分と考え、$-R$ から R までの実軸に沿った積分径路を c_1 とおくと、

$$I_R = \int_{c_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} \tag{6.74}$$

と表される。このままでは、留数定理が使えないから、上反面に半径 R の半円径路 c_2 を加えて c_1 とで閉曲線を作り、正の向きに１周する積分を J とおく。すなわち、

$$J = \left(\int_{c_1} \mathrm{d}z + \int_{c_2} \mathrm{d}z\right) \frac{1}{z^2+1} \tag{6.75}$$

である。被積分関数は、$\dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$ であるから、この積分径路の内部には、１位の極である $z = i$ が含まれている。その留数は、

$$\mathrm{Res}[i] = \lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} \tag{6.76}$$

である。したがって、

$$J = 2\pi i \mathrm{Res}[i] = \pi \tag{6.77}$$

となる。

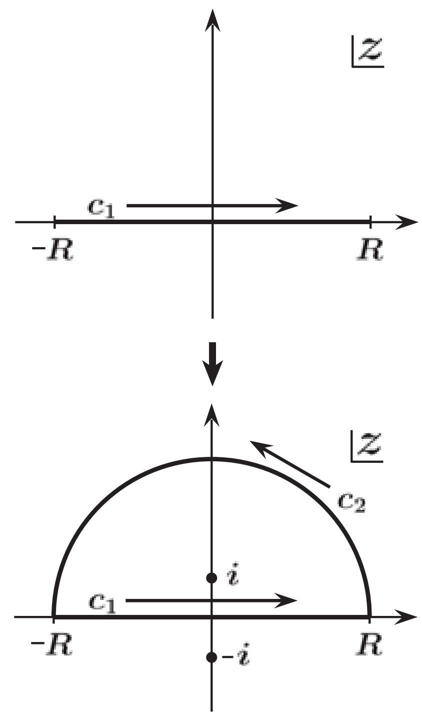

図 6.9: 積分径路

ところで、

$$K = \int_{c_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} \tag{6.78}$$

とおくと、ほしい積分は、

$$I = \lim_{R\to\infty} I_R = \lim_{R\to\infty} (J-K) = \pi - \lim_{R\to\infty} K \tag{6.79}$$

である。K は半円上の積分であるから、$z = R\mathrm{e}^{i\theta}$ とおくと、$\mathrm{d}z = iR\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ となるから、

$$K = \int_0^\pi \frac{iR\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{R^2\mathrm{e}^{2i\theta}+1} = \frac{i}{R}\int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{d}\theta}{1+R^{-2}\mathrm{e}^{-2i\theta}} \tag{6.80}$$

ここで $R\to\infty$ の極限をとれば、後ろの式で被積分関数が有限で、積分区間も有限領域だから、積分は有限であるから、

$$\lim_{R\to\infty} K = 0 \tag{6.81}$$

であることが分かる。したがって、

$$I = \pi \tag{6.82}$$

である。

この問題では、閉曲線を作るときに下半面の半円をつけても構わない。ただし、その時には負の向きの１周となり、閉曲線の内部にある１位の極が $z = -i$ であることに注意しなければならない。

6.7.3　例３

〔問題〕 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ を求めよ。

〔解答〕 この問題もまず有限区間 $[-R, R]$ の積分として計算し、最後に $R \to \infty$ の極限をとることにし、複素平面上の実軸に沿った（径路 c_1 上の）積分であるとする。

$$I = \lim_{R\to\infty} I_R = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x, \quad I_R = \int_{c_1} \frac{\sin z}{z} \mathrm{d}z = \frac{1}{2i} \int_{c_1} \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{z} \mathrm{d}z \tag{6.83}$$

とする事ができる。これら I_{R1} と I_{R2} をそれぞれ別に求めることにする。

まず、被積分関数が $z = 0$ で正則であるから、径路 c_1 を図のように変更しておく。すなわち、原点をさけるように下半面の小さな半円を迂回しているものとする。これは、正則関数であるから、積分が径路によらないからできることである。積分径路をこのように変形した後は、２種類の積分

$$I_{R1} = \frac{1}{2i} \int_{c_1} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z} \mathrm{d}z \tag{6.84}$$

$$I_{R2} = \frac{1}{2i} \int_{c_1} \frac{\mathrm{e}^{-iz}}{z} \mathrm{d}z \tag{6.85}$$

を考えることができ、

$$I_R = I_{R1} - I_{R2} \tag{6.86}$$

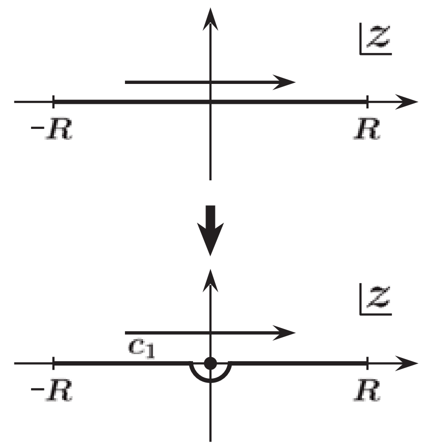

図 6.10: 積分径路 c_1 の変形

I_{R1} の計算

やはりこの計算でも上半面の半径 R の半円径路 c_2 （その積分を K_1 とする）を付け加えて閉曲線を１周する積分 J_1

$$J_1 = 2iI_{R1} + K_1 = \left(\int_{c_1} \mathrm{d}z + \int_{c_2} \mathrm{d}z\right) \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z} \tag{6.87}$$

を考える。この閉曲線の内部の特異点は、$z = 0$ のみで、１位の極である。その留数は、

$$\mathrm{Res}[0] = \lim_{z\to 0} \mathrm{e}^{iz} = 1 \tag{6.88}$$

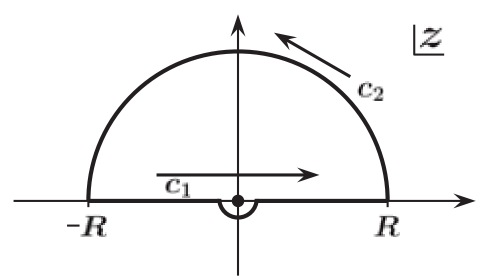

図 6.11: 上半面の半円径路 c_2 の追加

である。したがって、

$$J_1 = 2\pi i \tag{6.89}$$

で与えられる。

ところで、K_1 であるが、この経路に沿った積分は、$z = R\mathrm{e}^{i\theta}$ とおいて積分変数を θ にかえると、$\mathrm{d}z = iR\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta = iz\mathrm{d}\theta$ であり、θ は、0 から π まで変化するから、

$$\begin{aligned} K_1 &= i\int_0^{\pi} \exp\{iR\mathrm{e}^{i\theta}\}\mathrm{d}\theta = i\int_0^{\pi} \exp\{iR(\cos\theta + i\sin\theta)\}\mathrm{d}\theta \\ &= i\int_0^{\pi} \exp\{iR\cos\theta\}\exp\{-R\sin\theta\}\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{6.90}$$

により与えられる。

ところで、三角不等式より、この絶対値に対して、

$$\begin{aligned} |K_1| &= \left|\int_0^{\pi} \exp\{iR\cos\theta\}\exp\{-R\sin\theta\}\mathrm{d}\theta\right| \\ &\leq \int_0^{\pi} |\exp\{iR\cos\theta\}\exp\{-R\sin\theta\}||\mathrm{d}\theta| = \int_0^{\pi} \exp\{-R\sin\theta\}\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{6.91}$$

という不等式が成り立つ。また、$\sin\theta$ が $\dfrac{\pi}{2}$ に関して対称であることを利用すると、

$$|K_1| \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\{-R\sin\theta\}\mathrm{d}\theta \tag{6.92}$$

が得られる。さらに、区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ において、$\sin\theta \geq \dfrac{2\theta}{\pi}$ であることを考慮すると

$$\begin{aligned} |K_1| &\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\{-R\sin\theta\}\mathrm{d}\theta \\ &\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left\{-\frac{2R}{\pi}\theta\right\}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{R}(1 - \exp\{-R\}) \end{aligned} \tag{6.93}$$

が得られるから、$\lim_{R\to\infty} K_1 = 0$ である。したがって、

$$\lim_{R\to\infty} I_{R1} = \frac{1}{2i}\lim_{R\to\infty}(J_1 - K_1) = \pi \tag{6.94}$$

である。

I_{R2} の計算 である。

この計算の場合、下半面の半径 R の半円径路 c_3 （その積分を K_2 とする）を付け加えて閉曲線を１周する積分 J_2

$$J_2 = 2iI_{R2} + K_2 = \left(\int_{c_1}\mathrm{d}z + \int_{c_3}\mathrm{d}z\right)\frac{\mathrm{e}^{-iz}}{z} \tag{6.95}$$

を考える。この１周積分は負の向きの１周であるが、この閉曲線内部には特異点は存在しないから、

$$J_2 = 0 \tag{6.96}$$

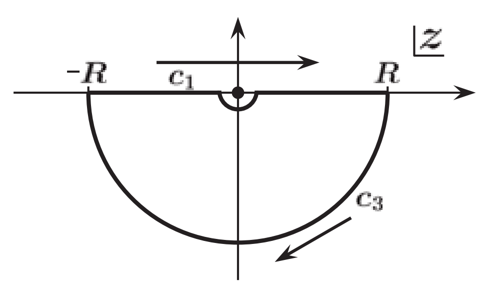

図 6.12: 下半面の半円径路 c_3 の追加

また、K_1 と同様にして、

$$\lim_{R\to\infty} K_2 = 0 \tag{6.97}$$

が言えるから、

$$\lim_{R\to\infty} I_{R2} = \frac{1}{2i}\lim_{R\to\infty}(J_2 - K_2) = 0 \tag{6.98}$$

である。

以上より、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi \tag{6.99}$$

である。

6.8　半円の追加に関する注意

上にあげた２例では、留数定理を用いることができるように**適当な**径路（ここでは半円）を追加し、後でこの半円の寄与が $R\to\infty$ の極限で 0 になることを示した。半円である必要はない（閉曲線が長方形になるようにしても良い）が、注意してほしいのは、例３の場合である。（例２の場合は上半面・下半面どちらでも良い。）この場合は、e^{iz} に対しては上半面、e^{-iz} に対しては下半面の半円を追加しなければならないのである。理由は、半円上で、

$$z = R\cos\theta + iR\sin\theta \tag{6.100}$$

となるから、

$$|\mathrm{e}^{\pm iz}| \;=\; |\mathrm{e}^{\pm i(R\cos\theta + iR\sin\theta)}| = |\mathrm{e}^{\mp R\sin\theta)}| \tag{6.101}$$

となり、θ が有限のところで考えたときに、$R\to\infty$ の極限が、

$$\theta > 0 \quad |\mathrm{e}^{iz}| \to 0,\quad |\mathrm{e}^{-iz}| \to \infty \tag{6.102}$$

$$\theta < 0 \quad |\mathrm{e}^{iz}| \to \infty,\quad |\mathrm{e}^{-iz}| \to 0 \tag{6.103}$$

となってしまうからである。

また、e^{iz} について考えるとして、$\theta = 0$ 近傍では、$|\mathrm{e}^{iz}| \sim 1$ となっている。この部分の寄与がどうなるかを考えてみよう。

$$R\sin\theta \sim R\theta = O(1) \;\Rightarrow\; \theta < O\left(\frac{1}{R}\right) \tag{6.104}$$

であるから、

$$K \;=\; \int z^{-m}\mathrm{e}^{iz}\mathrm{d}z \tag{6.105}$$

を考えたとき、係数はともかくとして、R のベキがどうなるかをみると、

$$K \propto \int R^{-m}R\mathrm{e}^{iR\theta}\mathrm{d}\theta \sim \int_0^{O(1/R)} R^{-m+1}O(1)\mathrm{d}\theta \sim O(R^{-m}) \tag{6.106}$$

となることが分かる。したがって、半円上の積分は、$m > 0$ ならば 0 に収束するが、$m = 0$ のときは、定数項が残る可能性があり、$m > 0$ ならば発散する。例３の場合は $m = 1 > 0$ だから 0 に収束したのである。

第7章　解析接続

整級数で与えられた関数 $f(z)$ があり、その収束半径が R_{c} だったとしよう。この関数は、収束円内部でのみ使え、正則である。収束円周上および外部では利用できない。それを、外部に接続して使おうという手続きが解析接続である。収束円内部の点 a を取り、その近傍で項を組み替えると、そのようにして出来た級数は、a を中心とする収束円をもち、その内部で正則であると見なすことが出来る。この収束円はもとの収束円外部の点を含んでいるかもしれない。その場合、この再定義を使えば、もとの収束円外部でも関数として定義できる。

　このことを例により示すことにする。今、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{7.1}$$

という整級数を考えよう。この級数の収束半径は、$R_{\mathrm{c}} = 1$ であり、収束円内部では、

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \tag{7.2}$$

と同一である。しかし、収束円外部では定義できていない。

　この関数を、点 $z_1 = \dfrac{i}{2}$ のまわりで考えてみよう。すなわち、$z = z - z_1 + z_1 = w + z_1$ と変形して、w の級数の形、

$$g(w) = f(w + z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (w + z_1)^n \tag{7.3}$$

に変形（項の組み替え）をする。これの括弧を展開すると、

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} {}_nC_m z_1^{n-m} w^m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} z_1^{n-m} w^m \tag{7.4}$$

が得られる。

　この2重和を取り直すことを考えよう。$m-n$ 平面で考えると、2重和は図7.1(a) の黒点のところについての和と言うことになる。和は、$n = 0$ から初めて、m を 0 から n まで足し、n を増加させていって全部足し合わせるという順をおってできる。この2重和は、図7.1(b) のように組み替える。これは、$n - m = \ell$（$n = \ell + m$）とおいて、まず、ℓ を固定し、m を 0 から ∞ まで足し、次に ℓ について 0 から ∞ まで足し合わせるというものである。どちらにせよ黒丸の点について全て足し合わせることになる。すると、

$$g(w) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\ell + m)!}{m!\ell!} z_1^{\ell} w^m \tag{7.5}$$

となる。ここで、和をとる順番を変えて、先に、

$$A_m(z_1) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ell + m)!}{m!\ell!} z_1^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(m+1)\cdots(m+\ell)}{\ell!} z_1^{\ell} \tag{7.6}$$

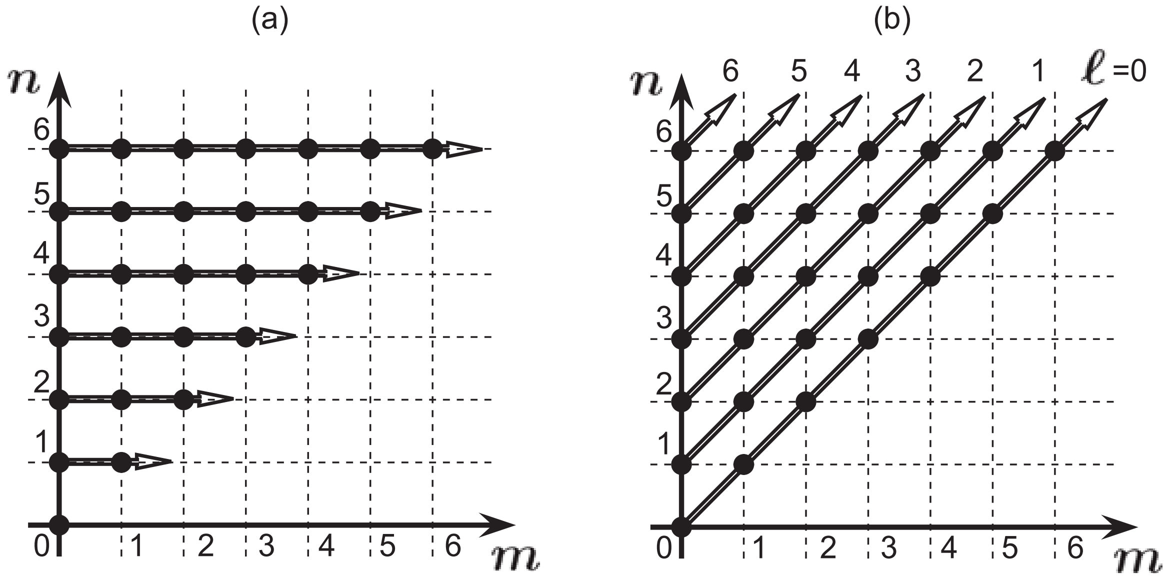

図 7.1: 2 重和の取り直し

について考えてみよう。ただし、$\ell = 0$ の場合は、1 である。

$$\left[\frac{\mathrm{d}^{\ell}}{\mathrm{d}\zeta^{\ell}}(1-\zeta)^{-(m+1)}\right]_{\zeta=0} \left[(m+1)\cdots(m+\ell)(1-\zeta)^{-(m+1+\ell)}\right]_{\zeta=0} = \frac{(m+\ell)!}{m!} \quad (|\zeta|<1) \tag{7.7}$$

であり、$\zeta = 0$ のまわりの Taylor 展開

$$f(\zeta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{f^{(\ell)}(0)}{\ell!}\zeta^{\ell} \tag{7.8}$$

を見比べれば、

$$A_m(z_1) = (1-z_1)^{-(m+1)} \tag{7.9}$$

となることが分かる。したがって、

$$g(w) = \sum_{m=0}^{\infty}(1-z_1)^{-(m+1)}w^m = \frac{1}{1-z_1}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{w}{1-z_1}\right)^m \tag{7.10}$$

が得られる。この w の整級数は、$\left|\dfrac{w}{1-z_1}\right| < 1$、すなわち、$|w| < |1-z_1| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ であれは、収束し、

$$g(w) = \frac{1}{1-z_1}\frac{1}{1-\frac{w}{1-z_1}} = \frac{1}{1-z_1-w} = \frac{1}{1-z} = f(z) \tag{7.11}$$

となる。すなわち、この範囲でやはり $f(z)$ とみなして良いことになる。

この範囲を図示すればすぐ分かるように、もとの収束円（原点中心の半径 1 の円）の外部にはみ出した領域がある。このように、最初の収束円内に点を取り、その点からのずれ（ここでは w）に書き換えて（項を組み替えて）やることにより、より広い範囲にまで使えるようにすることを解析接続という。

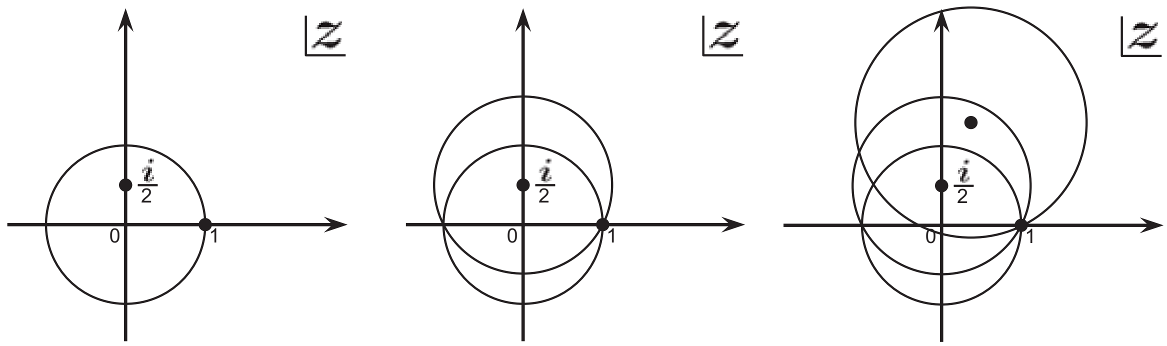

図 7.2: 解析接続の手続きについて図示

当然、更に w で記述した収束円内部に別の点を取り、さらにこの手続きを続ければ、更に定義域を広げることが出来る。最終的にどうしても収束円周上となってしまうのは、実は、$z = 1$ だけである。これは、

$$f(z) = \frac{1}{1 - z} \tag{7.12}$$

であり、この関数をみれば、特異点が $z = 1$ （1位の極）にあるからである。

付 録A　線形代数

量子力学でも利用するので、複素数を要素とする行列とベクトルに関して述べることにする。

A.1　ここでの書き方

ここでは、N 次元について考え、

$$\text{行列は}\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \quad \text{ベクトルは}\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

のように書くことにする。

単位行列の定義は実行列の時と変わらず、

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

である。これを単に 1 と表記することもある。単位行列の要素は Kronecker （クロネッカー）のデルタで書ける：

$$(E)_{ij} = \delta_{ij} \tag{A.3}$$

また、最も単純な基底ベクトルを

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \vec{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

と表記する。これらの列ベクトルを並べた行列は単位行列である。

$$E = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \cdots \ \vec{e}_N) \tag{A.5}$$

A.2　行列やベクトルの和や積

行列と行列の和、ベクトルとベクトルの和、行列と行列の積、行列とベクトルの積、およびそれらのスカラー倍に関しては実行列の場合と同じである。たとえば、2 個の行列 A と B（行列要素を $a_{ij},\ b_{ij}$ とする）の積は、

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} b_{kj} \tag{A.6}$$

により与えられる。

行列式の定義も変わらない。また、逆行列の存在条件

$$\mathrm{det}A \neq 0 \ \Rightarrow\ \text{逆行列存在} \mid \mathrm{det}A = 0 \ \Rightarrow\ \text{逆行列存在しない} \tag{A.7}$$

および、逆行列を余因子行列により求める求め方も変わらない。

違いがでるのは、ベクトルの内積である。内積は、任意のベクトルのノルム（長さ）が実数でなければならない、すなわち、ノルムの 2 乗が 0 以上でなければならないという要請から来ている。また、物理で重要となる特殊な行列も、「対称行列 ⇒ エルミート (Hermite) 行列」、「直交行列 ⇒ ユニタリー (unitary) 行列」と変更する必要がある。これらの行列は実行列の場合、それぞれ対称行列、直交行列となる。したがって、複素数にすることによる拡張にすぎない。

A.2.1　ベクトルの内積

ベクトルの内積は、

$$(\vec{a},\, \vec{b}) \ = \ \sum_{k=1}^{N} a_k^* b_k \tag{A.8}$$

により定義する。したがって、

$$(\vec{a},\, \vec{b}) = (\vec{b},\, \vec{a})^* \tag{A.9}$$

である。

このように定義すれば、

$$(\vec{a},\, \vec{a}) \ = \ \sum_{k=1}^{N} a_k^* a_k = \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \geq 0 \tag{A.10}$$

となり、ノルムが正しく定義できる。複素数の場合、a_k^2 は負にもなりうるし、実数になる保証もない。

A.3　エルミート行列とユニタリー行列

複素数に拡張すると、実対称行列はエルミート行列に、直交行列はユニタリー行列と変更されるので、これらについて述べることにする。まず、エルミート共役の定義から始める。

A.3.1　エルミート共役

行列 $A = (a_{ij})$ に対して、行と列を入れ替え、複素共役をとった行列を $A^\dagger$ と書き、A のエルミート共役という。A が実行列の場合は、転置行列となる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{N1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{N2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N}^* & a_{2N}^* & \cdots & a_{NN}^* \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

である。当然 $(A^\dagger)^\dagger = A$ である。

列ベクトルにこの操作をすると（複素共役をとった）行ベクトルになる。

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}^\dagger = (a_1^*\ a_2^*\ \cdots\ a_N^*) \tag{A.12}$$

エルミート共役を用いるとベクトルの内積は

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}^\dagger \vec{b} \tag{A.13}$$

と書ける。

エルミート共役について、次のような性質がある。（実対称行列の場合とほとんど同じ。）

1. **和：** $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$
〔証明〕式のみ示す。

$$(A+B)_{ij}^\dagger = (A+B)_{ji}^* = a_{ji}^* + b_{ji}^* = (A^\dagger)_{ji} + (B^\dagger)_{ji} \tag{A.14}$$

2. **積：** $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ 〔証明〕式のみ示す。

$$(AB)_{ij}^\dagger = (AB)_{ji}^* = (\sum_{k=1}^N a_{jk} b_{ki})^* = \sum_{k=1}^N a_{jk}^* b_{ki}^* = \sum_{k=1}^N (A^\dagger)_{kj} (B^\dagger)_{ik} = (B^\dagger A^\dagger)_{ij} \tag{A.15}$$

A.3.2　エルミート行列

$$A^\dagger = A, \quad (a_{ij} = a_{ji}^*) \tag{A.16}$$

を満たす行列をエルミート行列という。

エルミート行列には、以下に示す著しい性質があり、物理・化学の定式化によく用いられる。

A.3.3　行列の固有値と固有ベクトル（復習）

行列 A の固有値 λ と固有ベクトル $\vec{u}$ は、

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}, \qquad \vec{u} \neq 0 \tag{A.17}$$

を満たすものである。この方程式には常に $\vec{u} = 0$ という解（自明な解: trivial solution）が存在するが、それは固有ベクトルにいれない。

$$(A - \lambda E)\vec{u} = 0 \tag{A.18}$$

と変形すれば明らかなように、行列 $A - \lambda E$ に逆行列 $(A - \lambda E)^{-1}$ が存在すると、$\vec{u} = 0$ となってしまう。したがって、固有値 λ は、行列 $A - \lambda E$ に逆行列が存在しない条件

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{A.19}$$

を満たさねばならない。これは、λ についての N 次方程式であり、複素数まで許せば、N 個の解がある。これらの N 個の解 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N\}$ に対応して、N 個の固有ベクトル $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_N\}$ が各ベクトルの係数を除いて決まる。ただし、一般の行列の場合は、固有値、固有ベクトルが実になる保証はない。このベクトルの係数は、ノルムが 1 になるように（$(\vec{u}_j, \vec{u}_j) = 1$ となるように）決めればよい。（その方が都合がよい。）

A.3.4　エルミート行列の固有値の実数性

〔定理〕エルミート行列の固有値は実数である。
〔証明〕エルミート行列 A の固有値方程式

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}, \qquad \vec{u} \neq 0 \tag{A.20}$$

が解けて固有値 λ_j と固有ベクトル $\vec{u}_j$ $(j = 1, 2, \cdots, N)$ が求まったとする。固有ベクトルは全て

$$(\vec{u}_j, \vec{u}_j) = \vec{u}_j^\dagger \vec{u}_j = 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, N) \tag{A.21}$$

と規格化されているものとする。いま、スカラー $\vec{u}_j^\dagger A \vec{u}_j$ を考える。

$$\vec{u}_j^\dagger A \vec{u}_j \;=\; \vec{u}_j^\dagger(\lambda_j \vec{u}_j) = \lambda_j \vec{u}_j^\dagger \vec{u}_j = \lambda_j \tag{A.22}$$

が得られる。この両辺のエルミート共役をとると、スカラーは複素共役に変わるから、

$$(\vec{u}_j^\dagger A \vec{u}_j)^\dagger \;=\; \lambda_j^* \tag{A.23}$$

となるが、エルミート共役の演算規則 $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ を適用すると、

$$(\vec{u}_j^\dagger A \vec{u}_j)^\dagger \;=\; \vec{u}_j^\dagger A^\dagger \vec{u}_j \tag{A.24}$$

である。エルミート演算子を考えているから、

$$(\vec{u}_j^\dagger A \vec{u}_j)^\dagger \;=\; \vec{u}_j^\dagger A \vec{u}_j = \lambda_j \tag{A.25}$$

となり、$\lambda_j = \lambda_j^*$ が得られる。すなわち、λ_j は実数である。

A.3.5　異なる固有値に属する固有ベクトルの直交性

ここでもやはり、固有値方程式が解け、固有値 λ_j と固有ベクトル $\vec{u}_j$ $(j=1, 2, \cdots, N)$ が求まったとする。固有ベクトルは全て規格化されているものとする。いま、スカラー $\vec{u}_m^\dagger A\vec{u}_n$ を考える。ただし、$\lambda_n \neq \lambda_m$ とする。

$$\vec{u}_m^\dagger A\vec{u}_n \;\; = \;\; \vec{u}_m^\dagger(\lambda_n\vec{u}_n) = \lambda_n\vec{u}_m^\dagger\vec{u}_n \tag{A.26}$$

が得られる。一方、$\vec{u}_m^\dagger A = (A\vec{u}_m)^\dagger = \lambda_m\vec{u}_m^\dagger$, $(A^\dagger = A,, (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger, , \lambda_m$ は実数) だから、

$$\vec{u}_m^\dagger A\vec{u}_n \;\; = \;\; = \lambda_m\vec{u}_m^\dagger\vec{u}_n \tag{A.27}$$

とも書けるから、

$$\lambda_n\vec{u}_m^\dagger\vec{u}_n = \lambda_m\vec{u}_m^\dagger\vec{u}_n \tag{A.28}$$

すなわち、

$$(\lambda_n - \lambda_m)\vec{u}_m^\dagger\vec{u}_n = 0 \tag{A.29}$$

が得られる。$\lambda_n \neq \lambda_m$ としているから、

$$\vec{u}_m^\dagger\vec{u}_n = 0 \tag{A.30}$$

である。すなわち、異なる固有値に属する固有ベクトルは直交している。

A.3.6　同じ固有値に属する異なる固有ベクトルの直交化

今度は、同じ固有値に属する固有ベクトル同士は直交するように選べることを示す。N 個の固有値のうち、$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_M$ の M 個が同じ値 μ をとるとする。（このように同じ固有値が複数個ある時、縮重あるいは縮退しているという。今の場合、M 重縮退。）これらに対応する固有ベクトルを適当に求めて、規格化したベクトルが $\vec{u}_j$ $(j=1, 2, \cdots, M)$ と得られたとする。すなわち、

$$A\vec{u}_j = \mu\vec{u}_j \; (j=1, 2, \cdots, M) \tag{A.31}$$

である。これらは互いに独立なはずである。

ここで、これらのベクトルの線形結合

$$\vec{v} = \sum_{n=1}^{M} c_n\vec{u}_n \tag{A.32}$$

を作って、A をかけると

$$A\vec{v} = A\sum_{n=1}^{M} c_n\vec{u}_n = \sum_{n=1}^{M} c_n A\vec{u}_n = \mu\sum_{n=1}^{M} c_n\vec{u}_n = \mu\vec{v} \tag{A.33}$$

と計算でき、$\vec{v}$ も A の固有値 μ に属する固有ベクトルであることが分かる。すなわち、$\{\vec{u}_j\}$ の線形結合をとっても、固有値の変わらない固有ベクトルが得られる。したがって、例えば Schmidt の直交化法を用い、規格化し直せば直交化できる。

Schmidt の直交化法

始めのベクトルは何でも良いから、$\vec{v}_1 = \vec{u}_1$ とする。次に、$\vec{u}_2$ から $\vec{v}_1$ の成分を取り去る。これは、$\vec{u}_2$ の $\vec{v}_1$ への射影成分を抜けばよい。あとは、規格化すればよい。このようにすると、

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{1-|(\vec{v}_1,\,\vec{u}_2)|^2}\{\vec{u}_2 - (\vec{v}_1,\,\vec{u}_2)\vec{v}_1\} \tag{A.34}$$

が得られる。このベクトルが、ノルムが 1 に規格化されていて、$\vec{v}_1$ との内積が 0 、すなわち直交していることを確かめよ。

つぎは、$\vec{u}_3$ から、$\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ の成分を取り去ればよい。これを順に続けていけば、互いに直交する M 個のベクトルが得られる。

A.3.7 A を対角化する行列

以上で、エルミート行列は、実数の固有値をもち、規格直交化した固有ベクトルが存在することが分かった。この N 個の固有ベクトル $\{\vec{u}_j\}$ を並べた行列を U とする。

$$U = (\vec{u}_1\,\vec{u}_2\,\cdots\,\vec{u}_N) \tag{A.35}$$

である。規格直交化してあると言うことは、

$$(\vec{u}_j,\,\vec{u}_k) = \vec{u}_j^\dagger\vec{u}_k = \delta_{jk} \tag{A.36}$$

を満たしていると言うことである。

この行列 U のエルミート共役 $U^\dagger$ を作ると、

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^\dagger \\ \vec{u}_2^\dagger \\ \vdots \\ \vec{u}_N^\dagger \end{pmatrix} \tag{A.37}$$

という行列になる。

この U と $U^\dagger$ を用いて $U^\dagger AU$ を計算すると、

$$\begin{aligned} U^\dagger AU &= \begin{pmatrix} \vec{u}_1^\dagger \\ \vec{u}_2^\dagger \\ \vdots \\ \vec{u}_N^\dagger \end{pmatrix} A(\vec{u}_1\,\vec{u}_2\,\cdots\,\vec{u}_N) = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^\dagger \\ \vec{u}_2^\dagger \\ \vdots \\ \vec{u}_N^\dagger \end{pmatrix} (A\vec{u}_1\,A\vec{u}_2\,\cdots\,A\vec{u}_N) \\ &= \begin{pmatrix} \vec{u}_1^\dagger \\ \vec{u}_2^\dagger \\ \vdots \\ \vec{u}_N^\dagger \end{pmatrix} (\lambda_1\vec{u}_1\,\lambda_2\vec{u}_2\,\cdots\,\lambda_N\vec{u}_N) = \begin{pmatrix} \lambda_1\vec{u}_1^\dagger\vec{u}_1 & \lambda_2\vec{u}_1^\dagger\vec{u}_2 & \cdots & \lambda_N\vec{u}_1^\dagger\vec{u}_N \\ \lambda_1\vec{u}_2^\dagger\vec{u}_1 & \lambda_2\vec{u}_2^\dagger\vec{u}_2 & \cdots & \lambda_N\vec{u}_2^\dagger\vec{u}_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1\vec{u}_N^\dagger\vec{u}_1 & \lambda_2\vec{u}_N^\dagger\vec{u}_2 & \cdots & \lambda_N\vec{u}_N^\dagger\vec{u}_N \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.38}$$

という行列が得られるが、$\vec{u}_j$ は規格直交化されているから、$\vec{u}_j^\dagger \vec{u}_k = \delta_{jk}$ を満たしている。したがって、この行列は、対角行列

$$U^\dagger A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix} \tag{A.39}$$

となる。

ところで、この U は、A の代わりに単位行列 E をはさんで今と同じような計算をすれば、λ_j の代わりに 1 が出てくるだけだから、

$$U^\dagger U = U U^\dagger = E \tag{A.40}$$

となることが分かる。いまは、有限次元の行列を扱っているから、積が単位行列になる場合には積の順序は問題にならない。このような性質をもつ行列をユニタリー行列という。この行列は、成分が全て実数である場合には、直交行列になる。

これをもって、「エルミート行列は、ユニタリー行列によって対角化される」という。

A.3.8 ユニタリー行列

直前に述べたが、

$$A^\dagger A = A A^\dagger = E \tag{A.41}$$

を満たす行列をユニタリー行列という。この行列も物理数学、特に量子力学で特別な役割を担う。

A.3.9 ユニタリー行列の固有値と固有ベクトル

ユニタリー行列 $(AA^\dagger = A^\dagger A = E)$ の固有値と固有ベクトルがどのようになるかを考えよう。やはり、固有値 $\{\lambda_j\}$ と規格化された固有ベクトル $\{\vec{v}_j\}$ が決まったとして話を進める。すなわち、

$$A\vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j \tag{A.42}$$

とする。こんどは、$\vec{v}_j^\dagger A^\dagger A \vec{v}_j = \vec{v}_j^\dagger \vec{v}_j = 1$ について考える。

$$\vec{v}_j^\dagger A^\dagger A \vec{v}_j = (A\vec{v}_j)^\dagger (A\vec{v}_j) = (\lambda_j \vec{v}_j)^\dagger (\lambda_j \vec{v}_j) = \lambda_j^* \lambda_j \vec{v}_j^\dagger \vec{v}_j = |\lambda_j|^2 = 1 \tag{A.43}$$

となるから、**ユニタリー行列の固有値は絶対値が 1** である。したがって、ϕ_j を実数として、

$$\lambda_j = \mathrm{e}^{i\phi_j} \tag{A.44}$$

と書ける。

A.3.10　固有ベクトルの直交性

異なる固有値に属する固有ベクトル $\vec{v}_j$ と $\vec{v}_k$ が直交することは、次のようにして示せる。$\vec{v}_j^\dagger A^\dagger A \vec{v}_k$ を考える。

$$\begin{aligned} \vec{v}_j^\dagger A^\dagger A \vec{v}_k &= (A\vec{v}_j)^\dagger (A\vec{v}_k) = (\lambda_j \vec{v}_j)^\dagger (\lambda_k \vec{v}_k) \\ &= \lambda_j^* \lambda_k \vec{v}_j^\dagger \vec{v}_k = \mathrm{e}^{i(\phi_k - \phi_j)} \vec{v}_j^\dagger \vec{v}_k = \vec{v}_j^\dagger \vec{v}_k \end{aligned} \tag{A.45}$$

が得られ、これから、

$$(\mathrm{e}^{i(\phi_k - \phi_j)} - 1) \vec{v}_j^\dagger \vec{v}_k = 0 \tag{A.46}$$

が得られる。いま、固有値が異なるとしているから、$\mathrm{e}^{i(\phi_k - \phi_j)} \neq 1$ である。したがって、$\vec{v}_j^\dagger \vec{v}_k = (\vec{v}_j, \vec{v}_k) = 0$ である。すなわち、固有ベクトルは直交している。

縮退がある場合の議論は、エルミート行列の場合と同じである。各自確認すること。したがって、固有ベクトルとして規格直交化したものをとることができる。エルミート行列と同様に、ユニタリー行列も**ユニタリー行列により対角化される**。

A.3.11　同時対角化

行列 A と行列 B がエルミート行列またはユニタリー行列であり、可換なとき、すなわち $[A, B] = 0\,(AB = BA)$ を満たすときには、同じユニタリー行列 U により対角化できる。A の固有値が $\{\lambda_n\}$ で B の固有値が $\{\mu_n\}$ であれば、

$$U^\dagger A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}, \qquad U^\dagger B U = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \mu_N \end{pmatrix} \tag{A.47}$$

とできる。

〔証明〕B が、エルミート行列であるとして証明する。まず、一方に縮退がない場合から考えることにする。縮退がない方の行列を A とし、固有値が λ_k で固有ベクトルが $\vec{u}_k$ であったとする。すなわち、

$$A\vec{u}_k = \lambda_k \vec{u}_k \tag{A.48}$$

であるとする。この両辺に左から B をかけると、

$$BA\vec{u}_k = \lambda_k B\vec{u}_k \tag{A.49}$$

となるが、A と B が可換 $(AB = BA)$ であることを用いて、

$$BA\vec{u}_k = A(B\vec{u}_k) = \lambda_k (B\vec{u}_k) \tag{A.50}$$

が得られる。この右側の等式は、括弧でくくってあるように、$(B\vec{u}_k)$ というベクトルが A の固有値 λ_k に属する固有ベクトルになっていることを意味する。いま、固有値 λ_k には縮退がな

い、すなわち、独立な固有ベクトルは１個しかないと仮定しているから、$(B\vec{u}_k)$ は、$\vec{u}_k$ の定数倍しかあり得ない。その定数を、c とすると、

$$B\vec{u}_k = c\vec{u}_k \tag{A.51}$$

ということになる。これは、$\vec{u}_k$ が、B の固有ベクトルにもなっていて、固有値が c である事を意味している。したがって、A の縮退のない固有ベクトルは、同時に B の固有ベクトルである。

つぎに、縮退がある場合を考える。固有値が、$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_M = \mu$ となっていて、M 重に縮退し、固有ベクトルも、$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_M$ が取りあえず求まったとする。ただし、$\vec{u}_k^\dagger \vec{u}_\ell = \delta_{k\ell}$ と規格直交化ができているものとする。

前と同様、

$$A(B\vec{u}_k) = \mu(B\vec{u}_k) \quad (k = 1, 2, \cdots, M) \tag{A.52}$$

までは成り立ち、$(B\vec{u}_k)$ というベクトル（M 個ある）が A の固有値 μ に属する固有ベクトルになっていることはいえる。したがって、$(B\vec{u}_k)$ は、$\vec{u}_\ell$ の線形結合でかける。すなわち、

$$B\vec{u}_k = \sum_{\ell=1}^{M} c_{k\ell}\vec{u}_\ell \tag{A.53}$$

とかける。この係数 $c_{k\ell}$ は、両辺に左から $\vec{u}_m^\dagger$ をかければ

$$\vec{u}_m^\dagger B\vec{u}_k = \sum_{\ell=1}^{M} c_{k\ell}\vec{u}_m^\dagger\vec{u}_\ell = \sum_{\ell=1}^{M} c_{k\ell}\delta_{m\ell} = c_{km} \tag{A.54}$$

と求まる。

次に、c_{km} を (k, m) 成分とする行列 C を考えると、

$$c_{mk}^* = (\vec{u}_k^\dagger B\vec{u}_m)^* = (\vec{u}_k^\dagger B\vec{u}_m)^\dagger = \vec{u}_m^\dagger B^\dagger \vec{u}_k = \vec{u}_m^\dagger B\vec{u}_k = c_{km} \tag{A.55}$$

だから、$C = C^\dagger$ を満たし、エルミート行列である。したがって、C は、ユニタリー行列により対角化できる。前にもみたように、規格直交化した固有ベクトル $\{\vec{v}_k\}$ $(C\vec{v}_j = \nu_j\vec{v}_j$ とする$)$ を並べた行列

$$V = (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_M) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1M} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{M1} & v_{M2} & \cdots & v_{MM} \end{pmatrix} \tag{A.56}$$

を用いれば、

$$V^\dagger C V = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \nu_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \nu_M \end{pmatrix} \tag{A.57}$$

とできる。成分で書けば、

$$\sum_{\ell=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}(V^\dagger)_{k\ell}(C)_{\ell m}(V)_{mn}=\sum_{\ell=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}v^*_{\ell k}c_{\ell m}v_{mn}=\nu_k\delta_{kn} \tag{A.58}$$

である。

ここで、新しいベクトルの集合 $\{\vec{w}_j\}$ を次により定義する。

$$\vec{w}_j = \sum_{\ell=1}^{M}\vec{u}_\ell v^*_{\ell j} \tag{A.59}$$

この集合も規格直交系であることは、

$$\begin{aligned}\vec{w}_j^\dagger\vec{w}_k &= \sum_{\ell=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}\vec{u}_\ell^\dagger\vec{u}_m v_{\ell j}v^*_{mk}\\ &= \sum_{\ell=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}\delta_{\ell m}v_{\ell j}v^*_{mk}=\sum_{\ell=1}^{M}v_{\ell j}v^*_{\ell k}=\delta_{jk}\end{aligned} \tag{A.60}$$

からわかる。また、逆に

$$\vec{u}_\ell = \sum_{m=1}^{M}v_{\ell m}\vec{w}_m \tag{A.61}$$

となることも言える。(各自計算せよ。)

この $\vec{w}_j$ に行列 B を作用させると、

$$\begin{aligned}B\vec{w}_j &= \sum_{k=1}^{M}B\vec{u}_k v^*_{kj}=\sum_{k=1}^{M}\sum_{\ell=1}^{M}c_{k\ell}\vec{u}_\ell v^*_{kj}\\ &= \sum_{k=1}^{M}\sum_{\ell=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}v^*_{kj}c_{k\ell}v_{\ell m}\vec{w}_m\\ &= \sum_{m=1}^{M}\nu_j\delta_{jm}\vec{w}_m=\nu_j\vec{w}_j\end{aligned} \tag{A.62}$$

が得られる。これは、$\vec{w}_j$ $(j=1,\cdots M)$ が B の固有値 ν_j に属する固有ベクトルであることを意味する。また、$\vec{w}_j$ $(j=1,\cdots M)$ は、A の固有値 μ に属する固有ベクトルの線形結合でできているから、やはり、A の固有値 μ に属する固有ベクトルでもあり、規格直交化もされている。したがって、$\vec{w}_j$ $(j=1,\cdots M)$ は、A および B の共通の固有ベクトルである。すなわち、A と B が可換ならば、共通の固有ベクトルをもち、同じユニタリー行列により対角化される。