電磁気学 B 試験問題　　— 図, 文, 式を使って説明し, 答えを求めよ —　　2026 年 2 月 6 日

1　環状電流の磁場

図 1 のように, 半径 a の円形の小さな回路に強さ I の定常電流が流れている. この回路は xy 平面 $(z=0)$ にあり, 円の中心を座標原点 $(0,\,0,\,0)$ とする.

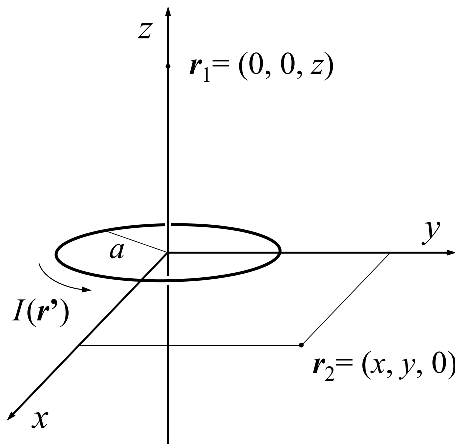

図 1　円電流と磁場

環状電流の磁場

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left\{\boldsymbol{m} - \frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^2}\right\} \quad (1)$$

ビオ - サバールの法則

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{\boldsymbol{I}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}ds \quad (2)$$

問 1-1.　磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ の概略図を描け.

問 1-2.　回路から十分に離れた観測点 $\boldsymbol{r}$ に生じる磁束密度が式 (1) のようになることを, 以下の手順で示せ. ここで, 磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m} = IS\boldsymbol{n}$, 円の面積 S, z 軸の向きの単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ である.

1. 電流の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$' を成分で表す.
2. 電流の向きを表す単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ を成分で表す.
3. これらを, ビオ-サバールの法則 (2) に代入する.
4. 観測点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ として, $a \ll r$ と近似する.
5. この近似式と式 (1) を成分で表した式を比較する.

問 1-3.　座標原点における磁場を求めるのに, 式 (1) が使えない理由を述べよ.

問 1-4.　式 (1) を使い, 次の観測点における磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を求めよ.
(A) z 軸上の点 $\boldsymbol{r}_1$. (B) xy 平面の点 $\boldsymbol{r}_2$.

問 1-5.　式 (1) を使い, 磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ の z 成分がゼロとなる点 $\boldsymbol{r}$ を求めよ. ここで, 極座標 $\boldsymbol{r} = r(\sin\theta\cos\phi,\,\sin\theta\sin\phi,\,\cos\theta)$ を使うとよい.

2　振動電流

図 2 に示す直列 LCR 共振回路について考える. 交流電源の発生する電圧を $\phi(t)$ とする. 式 (3) と式 (4) は, 回路を流れる電流 $I(t)$ とコンデンサに蓄えられる電気量 $Q(t)$ の時間変化に関する微分方程式である.

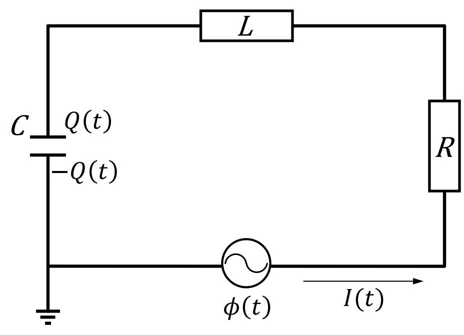

図 2　LCR 共振回路

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = \phi(t) \quad (3)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = I(t) \quad (4)$$

問 2-1.　式 (3) の各項の物理的意味を述べたのち, それらの関係が式 (3) になることを説明せよ.

問 2-2.　式 (4) を説明せよ.

以下, $\phi(t) = 0$ とし, また, $q(t) = \omega_0 Q(t)$ とおく. ここで, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ である.

問 2-3.　式 (3) と式 (4) を $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} I(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} I(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$ と変形したとき, 行列 A を R, C, ω_0 で表せ.

方程式の解が $\begin{pmatrix} I(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I' \\ q' \end{pmatrix} e^{\lambda t}$ になると仮定し, 微分方程式に代入すると, $\lambda\begin{pmatrix} I' \\ q' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} I' \\ q' \end{pmatrix}$ を得る.

問 2-4.　行列 A の固有値 λ_+ と λ_-, 対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_+$ と $\boldsymbol{u}_-$ を求めよ. ただし, $\omega_0 RC > 2$ とする. 固有ベクトルは必ずしも規格化しなくてもよい.

問 2-5.　積分定数 c_+ と c_- を使って, 一般解を表せ.

問 2-6.　時刻 $t=0$ のとき, コンデンサに電荷が蓄えられておらず, 電流が流れていた. つまり, 初期条件は $q(0) = 0$ と $I(0) = I_0$ だった. $0 \le t$ における $I(t)$ と $q(t)$ を求めよ.