電磁気学 B 試験問題　　— 図, 文, 式を使って説明し, 答えを求めよ —　　2024 年 2 月 9 日

1　ホール効果

半径 a の円柱状の長い導線において, 最初, 導線の正電荷密度 $\rho_+ (> 0)$ と伝導電子の電荷密度 $\rho_- (< 0)$ は $\rho_+ + \rho_- = 0$ の関係にある. 図 1 のように, この導線に一様な電流 I を流すと, 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が発生し, 電荷密度 ρ_- が変化する. 円筒座標のベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分を (A_r, A_φ, A_z) とし, 問 1-7 では次の式を使え. $\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \nabla\cdot\boldsymbol{E} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}$

問 1-1.　電流密度の強さ $i = |\boldsymbol{i}|$ を, I を使って表わせ. (以降, I を使わない)

問 1-2.　電流密度 $\boldsymbol{i} = (i_r, i_\varphi, i_z)$ の各成分を, 伝導電子の電荷密度 $\rho_- (< 0)$ と平均の速さ $v (> 0)$ で表せ. (教科書の $\boldsymbol{i} = -en\boldsymbol{v}$ に相当する)

問 1-3.　系の対称性とアンペールの法則より, 円柱の軸からの距離 r の $0 < r < a$ と $a < r$ の場合について, 磁束密度の向きと強さを求めよ. (電流密度の強さ i を使う)

問 1-4.　伝導電子 (電気量 $-e$) にはたらくローレンツ力の向きと強さを求めよ.

問 1-5.　電流を流すことによる電荷密度の大きさ $|\rho_-|$ の増減について, 定性的に述べよ.

問 1-6*　電流を流すと電荷分布が変化し, 導線中に電場が発生する. 定常状態では, 伝導電子にはたらくローレンツ力と静電気力がつりあう. 導体内の電場の成分を求めよ.

問 1-7*　ガウスの法則より, 電荷分布 ρ を求めよ. (i を消去し ρ_- と v を使う)

問 1-8*　$\rho = \rho_+ + \rho_-$ を利用し, ρ_- を ρ_+ で表わせ.

問 1-9*　導線は全体として電気的中性なので, ρ_- が変化した分だけ導体表面に電荷が現れる. 電荷の表面密度を求めよ.

アンペールの法則　$\displaystyle\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{S}$

ガウスの法則　$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

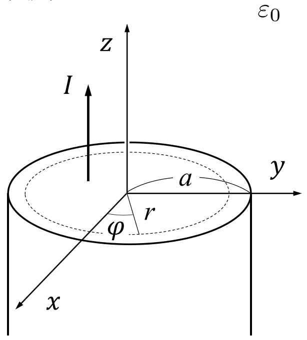

図 1　円柱状の導線に一様に流れる電流 I

2　電磁ポテンシャル

静電場 $\boldsymbol{E}$ と静磁場 $\boldsymbol{B}$ に関するマクスウェルの方程式 (2.1)–(2.4) について, 次の問いに答えよ.

問 2-1.　スカラーポテンシャル ϕ によって, 静電場を $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$ と表すと, 式 (2.3) が自動的にみたされることを, デカルト座標の成分について計算することによって示せ.

問 2-2.　ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ によって, 静磁場を $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ と表すと, 式 (2.2) が自動的にみたされることを, デカルト座標の成分について計算することによって示せ.

問 2-3.　一様な静磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ と静電場 $\boldsymbol{E} = (0, 0, E)$ を表す電磁ポテンシャルの例を 2 組 $(\boldsymbol{A}_1, \phi_1)$ と $(\boldsymbol{A}_2, \phi_2)$ 挙げ, それぞれ, 一様な静磁場と静電場を与えることを示せ.

問 2-4.　上の 2 つのベクトルポテンシャルが, $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_1 + \mathrm{grad}\,\chi$ のように表されるスカラー関数 χ の例を挙げよ.

問 2-5.　上のベクトルポテンシャルのどちらかについて, ベクトルの場を図示せよ.

静電磁場のみたす微分方程式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.1}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{2.2}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = 0 \tag{2.3}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{i} \tag{2.4}$$