電磁気学 B 試験問題 — 図, 文, 式を使って説明し, 答えを求めよ — 2023 年 1 月 27 日

1　水素原子

水素原子では, 質量の十分に大きな陽子のまわりを質量の小さな電子が半径 a, 角速度 ω の円運動をするという．電子の質量を m_e, 電気素量（素電荷）を e (>0), 真空の誘電率を ε_0 とする．解答用紙で記述する説明文で一時的に, 電子の運動による電流 I, 円運動の円の面積 S の記号を使ってよいが, 各問の答えでは使わない.

問 1-1　電子の円運動の概要を図に描き, 陽子を原点とした電子の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$, 速度 $\boldsymbol{v}$, 軌道角運動量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m_e\boldsymbol{v}$, 電子の運動による磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m}=IS\boldsymbol{n}$ を表す矢印を描き入れよ.

問 1-2　円運動の向心力は m_e, ω, a の積（べき乗を含む）である． 次元解析（$m_e^x\omega^y a^z$ が力の単位で表されるように x, y, z を決める）により向心力の大きさを求めよ.

問 1-3　クーロン力が向心力になることより ω を消去し, 電流と磁気双極子モーメントの大きさ I, m を求めよ.

問 1-4　磁気双極子モーメントと軌道角運動量の大きさの比 m/L を求めよ.

問 1-5　電子の運動により生じる磁場の概略を,（問 1-1 とは別の新たな）図に示せ.

問 1-6　ビオ・サバールの法則を使い, 円の中心における磁束密度の大きさ B_0 を求めよ.
（暗記した式を書かず, 右に示したビオ・サバールの法則を使う）

問 1-7　磁化 M は, 単位体積あたりの磁気双極子モーメントである． 水素原子の占める体積を半径 a の球として, 比 $\dfrac{B_0}{\mu_0 M}$ を求めよ.

ビオ・サバールの法則

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_C\frac{\boldsymbol{I}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}ds$$

2　共鳴

図 1 のように，粒子（質量 m，電気量 q）をばね（ばね係数 k）に取り付け，鉛直方向に電場 $E(t)=E_0\cos\omega t$ を加えた． このとき，粒子はつり合いの位置（$x=0$）を中心に鉛直方向に振動運動した.

問 2-1.　粒子の速さ $v(t)$ を粒子の変位 $x(t)$ で表せ. （時間についての微分を使う）

問 2-2.　粒子の加速度 $a(t)$ を速さ $v(t)$ で表せ.

問 2-3.　ばねの弾性力，空気抵抗による力 $-\eta v(t)$，静電気力を考え，運動方程式 $f(t)=ma(t)$ を $v(t)$ と $x(t)$ の一階微分方程式で表せ.

問 2-4.　複素関数 $\widetilde{E}(t)=\widetilde{E}\,e^{i\omega t}$，$\widetilde{v}(t)=\widetilde{v}\,e^{i\omega t}$，$\widetilde{x}(t)=\widetilde{x}\,e^{i\omega t}$ を，それぞれ $E(t)$，$v(t)$，$x(t)$ とみなして**問 2-1** と**問 2-3** の微分方程式に代入し，$\widetilde{v}$，$\widetilde{x}$ の連立方程式を求めよ． ただし，$\widetilde{E}=E_0$，$\widetilde{v}=v_0\,e^{i\beta}$，$\widetilde{x}=x_0\,e^{i\gamma}$ である.

問 2-5.　前問の連立方程式より $\widetilde{v}$ を求めよ.

問 2-6.　複素振幅 $\widetilde{v}$ の実振幅 v_0 と位相 β を求め，$v_0(\omega)$ と $\beta(\omega)$ をグラフに描け.

問 2-7.　実振幅 $v_0(\omega)$ の最大値 v_m，そのときの角周波数 ω_m と位相 β_m を求めよ.

問 2-8.　$\omega=\omega_\mathrm{m}$ のとき，$v(t)=\mathrm{Re}\,[\widetilde{v}(t)]$ と $x(t)=\mathrm{Re}\,[\widetilde{x}(t)]$ のグラフを描け.

問 2-9.　$\omega=\omega_\mathrm{m}$ のとき，粒子の運動エネルギー $\dfrac{1}{2}mv^2(t)$，ばねに蓄えられたエネルギー $\dfrac{1}{2}kx^2(t)$，単位時間あたりの空気抵抗による発熱 $\eta v^2(t)$ と静電気力のする仕事 $qE(t)v(t)$ を考え，エネルギーの流れについて述べよ． ただし，運動する荷電粒子による電磁放射は無視する.

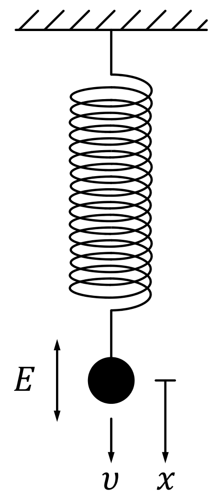

図 1　ばねに固定された粒子の鉛直方向の運動