電磁気学 B　試験問題 —— 図, 文, 式を使って説明し，答えを求めよ —— 2020 年 1 月 24 日

1　磁場のエネルギー密度

図 1 のように，十分に長いソレノイド(長さ ℓ，断面積 S，単位長さあたりの巻数 n)に強さ I の定常電流を流した。

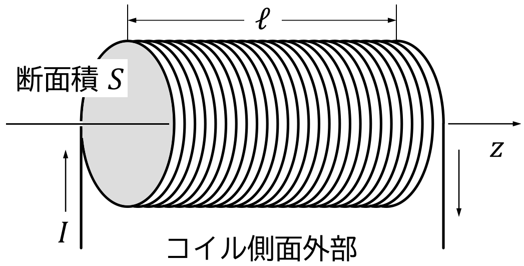

図 1: ソレノイドと磁場

問 1-1. アンペールの法則 $\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 I$ より，コイル内部とコイル側面外部の磁束密度が，それぞれ，一様であることを示せ。

問 1-2. コイル側面外部の磁束密度 $\boldsymbol{B} = 0$ を示せ。

問 1-3. コイル内部の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。

問 1-4. このソレノイドの自己インダクタンス L を求めよ。 ただし，コイルを貫く磁束 Φ は，自己インダクタンス L と電流 I により，$\Phi = LI$ と表される。

問 1-5. 電流を 0 からゆっくり大きくすると誘導起電力が発生する。 この誘導起電力に逆らって電荷にする仕事はコイルにエネルギーとして蓄えられる。 コイルに蓄えられたエネルギーを，電流 I と自己インダクタンス L で表せ。

問 1-6. コイルに蓄えられたエネルギーを，コイル内部の空間に蓄えられた磁場エネルギーとみなす。 電流 I が流れているコイル内部の磁場のエネルギー密度を，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と真空の透磁率 μ_0 で表せ。

問 1-7. コイル内部を透磁率 $\mu(>\mu_0)$ の物質でみたしたときの磁場のエネルギー密度について述べよ。

2　共鳴

図 2 のように，粒子(質量 m，電気量 q)をばね(ばね係数 k)に取り付け，鉛直方向に電場 $E(t) = E_0 \cos\omega t$ を加えた。 このとき，粒子はつり合いの位置($x = 0$)を中心に振動運動した。

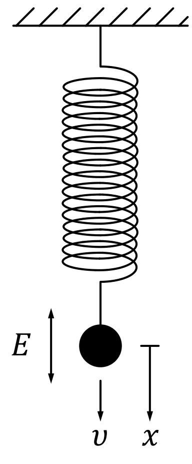

図 2: ばねに固定された粒子の鉛直方向の運動

問 2-1. 粒子の速さ $v(t)$ を粒子の変位 $x(t)$ で表せ。

問 2-2. 粒子の加速度 $a(t)$ を速さ $v(t)$ で表せ。

問 2-3. ばねの弾性力，空気抵抗による力 $-\eta v(t)$，静電気力を考え，運動方程式 $f(t) = ma(t)$ を $v(t)$ と $x(t)$ の一階微分方程式で表せ。

問 2-4. 複素関数 $\widetilde{E}(t) = \widetilde{E}\,e^{i\omega t}$，$\widetilde{v}(t) = \widetilde{v}\,e^{i\omega t}$，$\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}\,e^{i\omega t}$ を，それぞれ $E(t)$，$v(t)$，$x(t)$ とみなして**問 2-1** と**問 2-3** の微分方程式に代入し，$\widetilde{v}$，$\widetilde{x}$ の連立方程式を求めよ。 ただし，$\widetilde{E} = E_0$，$\widetilde{v} = v_0\,e^{i\beta}$，$\widetilde{x} = x_0\,e^{i\gamma}$ である。

問 2-5. 前問の連立方程式より $\widetilde{v}$ を求めよ。

問 2-6. 複素振幅 $\widetilde{v}$ の実振幅 v_0 と位相 β を求め，$v_0(\omega)$ と $\beta(\omega)$ をグラフに描け。

問 2-7. 実振幅 $v_0(\omega)$ の最大値 v_{m}，そのときの角周波数 ω_{m} と位相 β_{m} を求めよ。

問 2-8. $\omega = \omega_{\mathrm{m}}$ のとき，$v(t) = \mathrm{Re}[\widetilde{v}(t)]$ と $x(t) = \mathrm{Re}[\widetilde{x}(t)]$ のグラフを描け。

問 2-9. 粒子の運動エネルギー $\dfrac{1}{2}mv^2(t)$，ばねに蓄えられたエネルギー $\dfrac{1}{2}kx^2(t)$，単位時間あたりの空気抵抗による発熱 $\eta v^2(t)$ と静電気力のする仕事 $qE(t)v(t)$ を考え，エネルギーの流れについて述べよ。 ただし，運動する荷電粒子による電磁放射は無視する。