電磁気学 B　試験問題　—— 文と式を使って説明し，答えを求めよ ——　2013 年 1 月 31 日

1　直線電流と磁場 – ビオ・サバールの法則とアンペールの法則

図 1 のように，z 軸上の導線に定常電流 I を z 軸正の向きに流した。次式を参考に，問いに答えよ。ただし，問 1-1 と問 1-2 の解答順は問わない。

ビオ・サバールの法則　$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dV' \quad (1)$$

ストークスの定理　$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \quad (2)$$

アンペールの法則　$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0\int_S \boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{S} \quad (3)$$

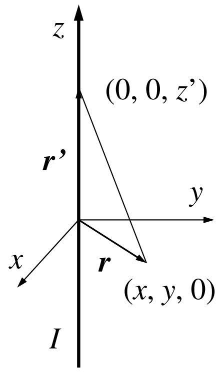

図 1: 無限に長い直線電流による磁場

問 1-1. 導線のまわりの磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ の大きさと向きを答えよ。

問 1-2. 式 (1) より，$\boldsymbol{r}$ における磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。ここで，$\int_V \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dV' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{I}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dz'$，$\boldsymbol{I}=(0,0,I)$，$\boldsymbol{r}=(x,y,0)$，$\boldsymbol{r}'=(0,0,z')$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおき，$(x,y)\neq(0,0)$ のとき解けばよい。

問 1-3. 問 1-2 の磁場について，$(x,y)\neq(0,0)$ において $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$ を計算せよ。

問 1-4. 経路 C が導線と鎖交しない（曲面 S が点 $(0,0,z)$ を含まない）場合，ストークスの定理 (2) を利用し，線積分 $\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}$ を求めよ。

問 1-5. 経路 C が導線と鎖交する場合，簡単な積分経路として xy 平面内の原点を中心とする半径 r の円周をとり，z 軸の正の向きを曲面 S の正の向きとするように経路 C で線積分する。まず，ベクトル $d\boldsymbol{s}$ を成分表示せよ。変数 r,ϕ を使って $\boldsymbol{s}=r(\cos\phi,\sin\phi,0)$ とおき，$d\boldsymbol{s}=(\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial\phi})_r\,d\phi$ を計算すればよい。

問 1-6. 次に，内積 $\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}$ を計算し，線積分 $\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}$ を求めよ。

問 1-7. 問 1-4 と問 1-6 より，直線電流による磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ が任意の経路 C でアンペールの法則 (3) をみたすことを示せ。

2　自己誘導と回路に流れる電流

図 2 のように，最初スイッチが S_0 の位置にあり，回路が開いていた。時刻 $t=0$ でスイッチを S_1 の位置にすると，電池の起電力 ϕ_{B} により電流が流れ始めた。十分に時間が経過し，時刻 $t=t_1$ になると定常電流 $\frac{\phi_{\mathrm{B}}}{R}$ になっていた。

問 2-1. 抵抗 R の両端の電位差 ϕ_{R} とコイル L の両端の電位差 ϕ_{L} を，符号（図中矢印の向き）に注意し電流 $I(t)$ で表せ。

問 2-2. 回路を一周すると電位は元に戻る ($\sum_i \phi_i = 0$) ことより，電流 $I(t)$ について微分方程式をたてよ。

問 2-3. 問 2-2 の微分方程式を解き，$0\le t\le t_1$ における $I(t)$ を求めよ。

問 2-4. コイルに蓄えられたエネルギーが一般に $\frac{1}{2}LI^2$ になることを示せ。

問 2-5. $0\le t\le t_1$ の間に，コイルに蓄えられるエネルギーを求めよ。

時刻 $t=t_1$ に，スイッチを S_2 の位置にし，回路から電池を切り離した。

問 2-6. $t\ge t_1$ において微分方程式をたて，電流 $I(t)$ を求めよ。

問 2-7. 横軸を時間 t，縦軸を電流 $I(t)$ のグラフを，$t\ge 0$ において描け。

問 2-8. 問 2-6 の結果を使い，$t\ge t_1$ において抵抗で発生するジュール熱の総量を求めよ。

問 2-9. 問 2-5 と問 2-8 の結果を比較し，エネルギーの保存について述べよ。

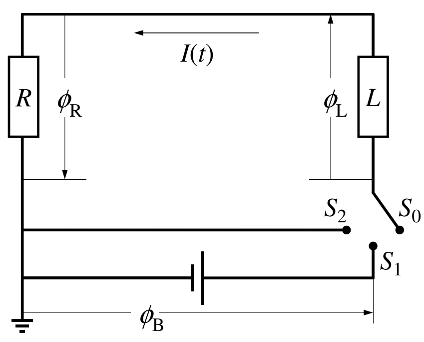

図 2: 電池（起電力 ϕ_{B}），コイル（インダクタンス L），抵抗（電気抵抗 R）からなる回路。途中，スイッチを切り替える。