電磁気学B　試験問題　　— 文章と式を使って説明し，答えを求めよ —　　2011 年 2 月 4 日

1　静磁場中の円電流

図 1 のように，z 軸方向を向いた大きさ B の一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ 中で，円形の導線に電流 I が流れている。円の半径は a，導線の断面積は A で，円を含む平面の法線方向の単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，yz 平面内で磁場に対し角度 θ だけ傾いている。断面積($A \ll \pi a^2$)は非常に小さいので，断面の中心を通る半径 a の円周上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$で，導線中の点を代表できる。

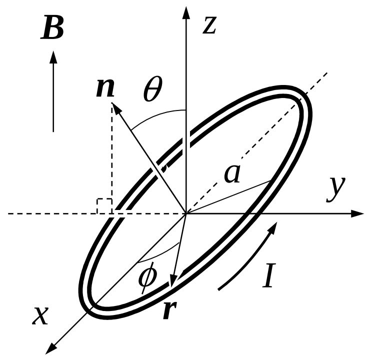

図 1: 一様な静磁場中の円電流

問 1-1. デカルト(xyz)座標で，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{t}$ を成分表示せよ。ここで $\boldsymbol{t}$ は円の接線方向の単位ベクトルで，電流の流れる向きを正とする。

問 1-2. 磁場中の電流密度 $\boldsymbol{i}$ にはたらく力の式 $\Delta\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{B})\Delta s$ を使い，導線にはたらく合力を求めよ。

問 1-3. 問 1-2 文中の式を使い，導線にはたらく力のモーメント $\boldsymbol{N}$(x 軸まわり)を成分表示せよ。

問 1-4. 問 1-3 で求めた力のモーメント $\boldsymbol{N}$を，ベクトル $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{n}$ で表せ。

問 1-5. 静電場中の電気双極子にはたらく力のモーメントと比較し，円電流は磁気双極子と同等であることを説明せよ。

— 以下では，この円電流にともなう磁気双極子モーメントが $\boldsymbol{M} = I\pi a^2\boldsymbol{n}$ であることを使え。

問 1-6. 導線中の自由電子の数密度 N，平均の速さ v，電荷 $-e$ などを使い，円電流 I を表せ。

問 1-7. 円運動する電子１個あたりの磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m}$ を求めよ。

問 1-8. 電子の質量を m_{e} としたとき，円運動する電子の角運動量 $\boldsymbol{\ell}$ を求めよ。

問 1-9. 電子の回転運動による磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m}$ と角運動量 $\boldsymbol{\ell}$ の関係を式で表せ。

2　変位電流とポインティング・ベクトル

図 2 のように，電荷 Q_0 を蓄えたコンデンサーに電気抵抗 R の抵抗とスイッチをつないだ。十分に広い面積 S の円形電極板の距離は d，電極間は真空である。マクスウェルーアンペールの法則は，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{i} + \varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t})$ である。

問 2-1. ガウスの法則を使い，電極間の電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ。

問 2-2. 問 2-1 の結果より，コンデンサーの容量 C を求めよ。

問 2-3. コンデンサーに蓄えられたエネルギーを求めよ。

問 2-4. 時刻 $t=0$ にスイッチを閉じた。微分方程式を解き，回路に流れる実電流 $I(t)$ とコンデンサーの電荷 $Q(t)$ を求めよ。

問 2-5. 抵抗で発生するジュール熱の総量を求めよ。

問 2-6. 電極の間の変位電流を，実電流 $I(t)$ で表せ。

問 2-7. 電極の間に発生する磁場$\boldsymbol{B}$を，実電流 $I(t)$ で表せ。

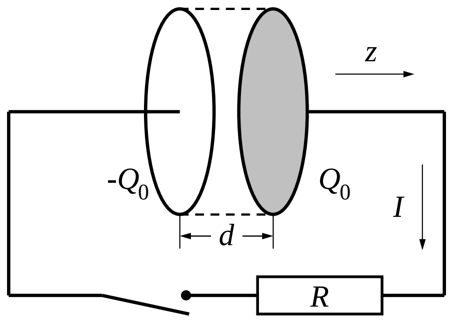

図 2: コンデンサーと抵抗からなる回路。座標の原点を電極の中心軸上，電極間の中点にとる。

問 2-8. コンデンサーの側面におけるポインティング・ベクトル $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ を求めよ。

問 2-9. 極板の電荷がゼロになるまでに，コンデンサーの側面を通過した電磁場のエネルギーを求めよ。

問 2-10. 問 2-3，問 2-5，問 2-9 の結果を比較し，エネルギーの保存について議論せよ。