電磁気学B　試験問題　　2010年2月2日

式や答えのみではなく，十分な説明をせよ。

1　ソレノイドコイル内の磁場のエネルギー密度

図1のように，ソレノイドコイル (長さ ℓ，断面積 S) に大きさ I の定常電流を流した。コイルは十分に長く，単位長さあたり n 回の割合で導線を巻いてある。

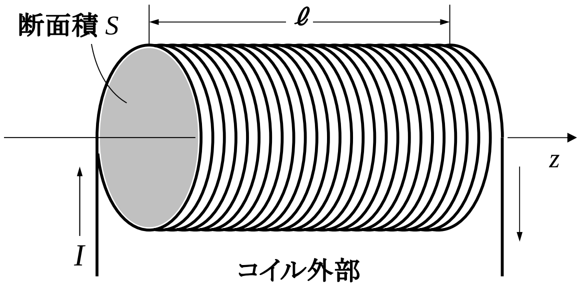

図1: ソレノイドコイル

問 1-1. アンペールの法則の積分形 ($\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 \sum_i I_i$) を使って，コイル内部の磁束密度とコイル側面の外部の磁束密度が，ともに一定であることを示せ。

問 1-2. コイル側面の外部の磁束密度 $\boldsymbol{B}$がゼロであることを示せ。

問 1-3. コイル内部の磁束密度 $\boldsymbol{B}$を求めよ。

問 1-4. このソレノイドコイルの自己インダクタンス L を求めよ。自己インダクタンスとは，コイルを貫く磁束 Φ と導線に流れる電流 I との関係式, $\Phi = LI$, の比例係数のことである。

問 1-5. コイルに流す電流をゼロからゆっくり上げると，誘導起電力に逆らって電荷に仕事をしたことになる。その仕事は，コイルにエネルギーとして蓄えられる。電流が I のときの，コイルに蓄えられたエネルギーを求めよ。

問 1-6. コイルに蓄えられたエネルギーを，コイル内部の空間に蓄えられた磁場エネルギーとみなそう。定常電流 I が流れているソレノイドコイル内部の静磁場のエネルギー密度を，磁束密度 $\boldsymbol{B}$と 真空の透磁率 μ_0 を使って表せ。

2　マクスウェルの方程式と電磁ポテンシャル

マクスウェルの方程式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho \qquad (2.1)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \qquad (2.2)$$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (2.3)$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \mathrm{t}} \qquad (2.4)$$

問 2-1 方程式 (2.1) と (2.4) の物理的意味を，それぞれ60字程度で述べよ。

問 2-2 電磁ポテンシャル $\boldsymbol{A}$, ϕ によって，電磁場を $\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\ \phi$, $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}$ と表すと，式 (2.2) と式 (2.3) が自動的にみたされることを示せ。(微分演算の恒等式は，証明してから使う)

問 2-3 前問の式を次元解析することによって，磁束密度の単位 T (テスラ) と電位の単位 V (ボルト) の関係を，長さの単位 m，質量の単位 kg，時間の単位 s を使って表せ。

問 2-4 式 (2.1) と 式 (2.4) を使って，電磁ポテンシャルのみたすべき方程式を求めよ。計算の途中，関係式 $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{X}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{X}) - \triangle \boldsymbol{X}$ を使ってもよい。ここで，$\triangle$ は，微分演算子のラプラシアンである。

問 2-5 一様な静磁場 $\boldsymbol{B} = (0,\ 0,\ B)$ と静電場 $\boldsymbol{E} = (0,\ 0,\ E)$ を表す電磁ポテンシャルの例を2組, $(\boldsymbol{A}_1, \phi_1)$ と $(\boldsymbol{A}_2, \phi_2)$, 挙げ，問 2-2 の電磁場への変換式をみたしていることを示せ。

問 2-6 前問の電磁ポテンシャルが，問 2-4 で求めた方程式をみたしていることを示せ。

問 2-7 問 2-5 の2組の電磁ポテンシャルは，ゲージ変換 ($\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_1 + \mathrm{grad}\chi$,　$\phi_2 = \phi_1 - \dfrac{\partial \chi}{\partial t}$) で互いに変換できる。このときのスカラー関数 χ を求めよ。