電磁気学B　試験問題　　── 文と式を使って説明し，答えを求めよ ──　　2015 年 1 月 23 日

1　円電流と磁場

図 1 のように，xy 平面上に半径 a の円形回路（中心を原点とする）をおき，強さ I の定常電流を流した．

問 1-1* yz 平面における，円電流による磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ の概略を図示せよ．

問 1-2* 観測点 $\boldsymbol{r}$ が円電流から十分離れている（$a \ll r = |\boldsymbol{r}|$）とき，磁束密度は，$\boldsymbol{B}_d(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{\mu_0}{4\pi r^3}\left\{\boldsymbol{m} - \dfrac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^2}\right\}$ と書かれる．ここで，磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m} = I\pi a^2\boldsymbol{n}$，法線ベクトル $\boldsymbol{n} = (0,\ 0,\ 1)$ である．この $\boldsymbol{B}_d$ の表式を利用し，**十分離れた** $\boldsymbol{r}_1 = (0,\ 0,\ z)$，$\boldsymbol{r}_2 = (x,\ y,\ 0)$ における磁束密度を求めよ．

2　ビオ・サバールの法則

再度，図 1 に示すような円電流による磁場を考える．ビオ・サバールの法則 $\boldsymbol{B}_b(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{C_I}\dfrac{\boldsymbol{I}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}ds$ を使い，z 軸上の**任意**の点 $\boldsymbol{r} = (0,0,z)$ における磁束密度を，以下の手順で求めよ．

問 2-1* 電流素片の位置ベクトル $\boldsymbol{r}'$ と電流 $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{r}')$ の成分を，I, a, θ で表せ．

問 2-2* 長さ $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ と ds を，a, θ, z で表せ．

問 2-3* ビオ・サバールの法則より，$\boldsymbol{r}$ における磁束密度 $\boldsymbol{B}_b(\boldsymbol{r})$ を求めよ．

問 2-4. $a \ll r$ のとき，$\boldsymbol{B}_b(\boldsymbol{r}) \approx \boldsymbol{B}_d(\boldsymbol{r})$ であることを示せ．

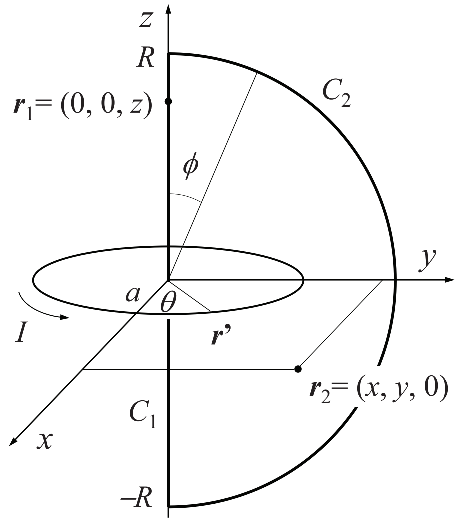

図 1: 強さ I の円電流による磁場を計算する．

3　アンペールの法則

問 3-1. 問 2-3 で求めた磁束密度について，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}_b$ を計算せよ．

問 3-2. 大きな $R\ (\gg a)$ を使い，経路 C を $C_1 : (0,0,-R) \to (0,0,R)$ と $C_2 : (0, R\sin\phi, R\cos\phi), (\phi : 0 \to \pi)$ の 2 つに分け，線積分を考える．$R \to \infty$ のとき，線積分 $\displaystyle\int_{C_1}\boldsymbol{B}_b\cdot d\boldsymbol{s}$ と (*) $\displaystyle\int_{C_2}\boldsymbol{B}_b\cdot d\boldsymbol{s}$ を計算せよ．

問 3-3. 経路 C を境界とする領域 S でアンペールの法則の面積分を計算せよ．

問 3-4. 問 3-1, 問 3-2, 問 3-3 の結果を使い，アンペールの法則について述べよ．

ストークスの定理

$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

アンペールの法則

$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0\int_S \boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{S}$$

4　相互インダクタンス

図 2 のように，半径がそれぞれ a_1, a_2 の円形回路が xy 平面上におかれた．$a_1 \gg a_2$ のとき，次の手順で，相互インダクタンス L_{12}，L_{21} を計算せよ．

問 4-1. 回路 1 を流れる電流 I_1 による磁場は，回路 2 の内部で一様とする．$I_2 = 0$ のとき問 2-3 の $\boldsymbol{B}_b(\boldsymbol{r})$ を使い，回路 2 を貫く磁束 Φ_2 を求めよ．

問 4-2. 右の定義と問 4-1 より，相互インダクタンス L_{21} を求めよ．

問 4-3* $I_1 = 0$ のとき，回路 2 を流れる電流 I_2 による磁束を考える．回路 2 を貫く磁束 Φ_{in}，回路 2 の外側で回路 1 の内側の領域を貫く磁束 Φ_{mid}，回路 1 の外側を貫く磁束 Φ_{out} の間の関係式を求めよ．（向きに注意）

問 4-4. 問 1-2，問 4-3 より，回路 1 を貫く磁束 $\Phi_1 = \Phi_{in} + \Phi_{mid}$ を求めよ．

問 4-5. 問 4-4 より，相互インダクタンス L_{12} を求めよ．

インダクタンスの定義

$$\Phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2$$

$$\Phi_2 = L_{21}I_1 + L_{22}I_2$$

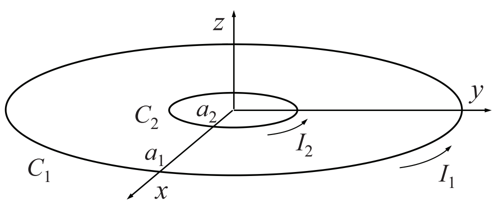

図 2: 中心を原点に一致させ，xy 平面上におかれた 2 つの円形回路 1 と 2．磁束 Φ は，z 軸正の向きに貫くとき，正とする．