電磁気学 A　試験問題　　　— 文と式を使って説明し，解答せよ —　　　2011 年 7 月 25 日

1　導体と静電場

電場は線形の微分方程式にしたがい，重ね合わせることができる。 例えば，電荷分布 $\rho_1(\boldsymbol{r})$ に対する静電場を $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})$，$\rho_2(\boldsymbol{r})$ に対し $\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})$ とすると，電荷分布 $\rho_1(\boldsymbol{r}) + \rho_2(\boldsymbol{r})$ に対する静電場は $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})$ になる。 さて，真空中に導体 1 と導体 2 を置くと，それぞれが q_1 と q_2 に帯電し，それぞれの電位が ϕ_1 と ϕ_2 であった。 これらの関係は，電気容量係数 C_{ij} を用いて式 (1) のように書かれる。

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

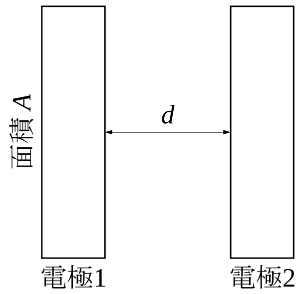

図 1: 平行平板コンデンサ。 電極の面積 A は十分に広く，原子の大きさに比べ十分に厚い。 電極間の間隔は d である。

問 1-1. 式 (1) より，導体の電位 ϕ_1 と ϕ_2 を q_1 と q_2 で表せ。

問 1-2. 導体 1 と導体 2 を 1 つのコンデンサと考え，コンデンサの電気容量 C を，電気容量係数 C_{ij} で表せ。その際，導体が $q_1 = q\ (> 0)$, $q_2 = -q$ のように帯電していると考え，$q = C\varDelta\phi$ から求めたらよい。

問 1-3. 積分形のガウスの法則 $\left(\int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, \mathrm{d}V\right)$ を使い，導体表面における電荷の面密度 σ と導体表面での電場 $\boldsymbol{E}$ の関係を求めよ。

問 1-4. 図 1 のような平行平板コンデンサの電極を，上で述べた導体と考える。 電荷の分布を +, − 記号で，導体内外の電場を矢印で描け。この小問では，電極 1 が $q_1 = q\ (> 0)$，電極 2 が $q_2 = -q$ に帯電したとせよ。

問 1-5. 電極 2 を接地 ($\phi_2 = 0$) した。 電極 1 近傍の電場と q_1 を，ϕ_1 で表せ。 同様に，q_2 と ϕ_1 の関係式を求めよ。

問 1-6. 電極 1 を接地した ($\phi_1 = 0,\ \phi_2 \neq 0$)。 電極 1 近傍の電場と ϕ_2，q_1 と ϕ_2，q_2 と ϕ_2 の関係式を求めよ。

問 1-7. 問 1-5 と問 1-6 の結果より，電気容量係数 $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ を求めよ。

問 1-8. 問 1-7 より，コンデンサの電気容量 C を求めよ。

問 1-9. コンデンサに蓄えられたエネルギー $U = \dfrac{q_1\phi_1 + q_2\phi_2}{2} = q\dfrac{\phi_1 - \phi_2}{2}$ を q と C で表せ。 また，U を，電極間の電場の大きさ E で表せ。

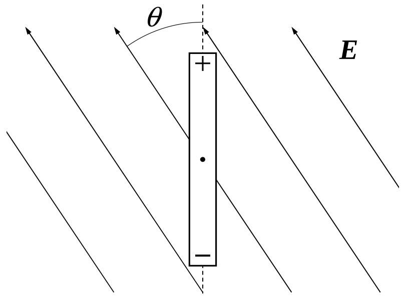

図 2: 一様な静電場中に角度 θ をなして置かれた電気双極子。電気双極子の長さは d で，中心は座標原点と一致している。

2　電気双極子

問 2-1. 一様な静電場 $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$ を与える静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めよ。ただし，$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$ であり，座標原点を基準点とする。

問 2-2. 図 2 のように，棒の両端が電荷 $\pm q$ に帯電した電気双極子を考える。 棒にはたらく偶力のモーメント $\boldsymbol{N}$ を，電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ と電場 $\boldsymbol{E}$ で表せ。 また，大きさ N を，それぞれの大きさ p, E, θ で表し，その向きを図に示せ。ここで，ある点まわりの力 $\boldsymbol{F}$ のモーメントとは，その点から力の作用点までの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると，$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ のことである。

問 2-3. 電荷 q と $-q$ が独立に静電場中にあるとして，それぞれの静電エネルギーを求めよ。

問 2-4. 問 2-3 を使い，静電場中の電気双極子モーメントのエネルギーを $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{E}$ で表し，また，p, E, θ でも表せ。

問 2-5. 静電場 $\boldsymbol{E}$ をゼロにし，電気双極子 $\boldsymbol{p}$ を $+z$ 軸に平行にした。 電気双極子から十分離れた場所での静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めよ。 $r \gg d$ なので，d について 1 次まで求めればよい。 ただし，無限遠方を基準点とする。

問 2-6. 問 2-5 の静電ポテンシャルによる静電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ。

問 2-7. 電気双極子 $\boldsymbol{p}$ による電場を実線の矢印で，静電ポテンシャルを点線で，概要を描け。（遠方も近傍も）