電磁気学 III　試験問題

2007 年 1 月 29 日

1　電荷保存則

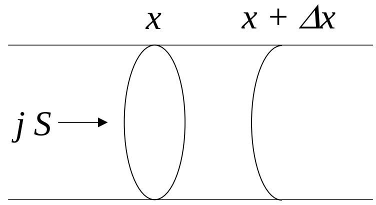

図 1: 断面積一定の導線を流れる電流

問 1-1. 図 1 のように，断面積 S [m^2] が一定の導線を x 軸に沿って置き，一様な密度 $\boldsymbol{j}$ [A/m^2] の電流を流した。 微小体積領域 $[x, x + \Delta x]$ における電荷 (密度 ρ [C/m^3]) のつりあいから，電荷保存則を導け。

問 1-2. 電荷保存則の物理的意味を述べよ。

問 1-3. 電荷保存則と同様の他の保存則を例示し，ρ と $\boldsymbol{j}$ に対応する物理量を示せ。

2　電磁波の反射と屈折

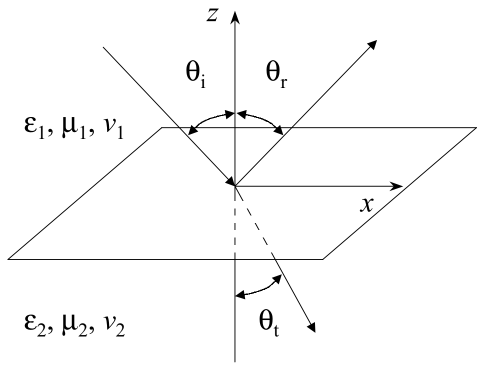

図 2: 境界面における電磁波の反射と屈折

図 2 のように，電磁気的性質の異なる媒質 1 (誘電率 ε_1, 透磁率 μ_1) と媒質 2 (ε_2, μ_2) が接している境界 (xy 平面) に，電磁波が入射すると，反射や屈折が起こる。以下では，媒質内や境界において，電荷も電流も存在しない ($\rho = 0, \boldsymbol{j} = 0$) とせよ。

問 2-1. 電磁誘導の式 ($\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$) とストークスの定理 ($\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$) を使い，境界条件 $E_{1t} = E_{2t}$ を導け。 ここで，E_{1t} と E_{2t} は，境界面における媒質 1 と媒質 2 の電場の接線成分である。

アンペール・マクスウェルの式で同様の計算をすると，磁場のみたすべき条件は $H_{1t} = H_{2t}$ になる。

問 2-2. 電場ベクトルを $\boldsymbol{E}_j = \boldsymbol{E}_{j0}\ \exp i(\omega t - \boldsymbol{k}_j \cdot \boldsymbol{x})$, ($j =$i (入射), t (透過), r (反射)) と表し，波の位相に境界条件を適用し，スネルの法則 (θ_r と θ_i, θ_t と θ_i の関係) を導け。ここで，振幅 $\boldsymbol{E}_{j0}$ は定ベクトル，入射波の波数ベクトルは $\boldsymbol{k}_i = (k_{ix}, 0, k_{iz})$ である。 また，媒質 1 に対する媒質 2 の相対屈折率を n_{21} とせよ。

問 2-3. 入射波の電場が，入射面 (zx 平面) に対し $\boldsymbol{E}_{i0} = (0, E_{i0}, 0)$ のように偏っている。 電場に対する境界条件より、透過波 $\boldsymbol{E}_{t0} = (E_{tx}, E_{ty}, E_{tz})$ と反射波 $\boldsymbol{E}_{r0} = (E_{rx}, E_{ry}, E_{rz})$ の各成分と，入射波の振幅成分 E_{i0} との関係を求めよ。

問 2-4. 電磁誘導の式より，磁場は，$\boldsymbol{H}_j = \dfrac{\boldsymbol{k}_j \times \boldsymbol{E}_j}{\omega\mu}$ と表される。 これを利用し，入射波の磁場の振幅ベクトル $\boldsymbol{H}_{i0}$ を，$E_{i0}, \omega, \mu_1, k_{ix}, k_{iz}$ を使って表せ。

問 2-5. 問 2-4 と同様に $\boldsymbol{H}_{t0}, \boldsymbol{H}_{r0}$ を求め，磁場に対する境界条件を，E_{i0} などを使って表せ。

問 2-6. 問 2-3 と問 2-5 で求めた式を連立させて，反射波と透過波の電場の振幅を求めよ。ただし，透磁率は $\mu_1 = \mu_2$ の関係をみたしているとし，結果は $E_{i0}, n_{21}, \cos\theta_i, \cos\theta_t$ のみを使って答えよ。

問 2-7. 入射波，反射波および透過波のポインティングベクトル $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ を求め，入射波のエネルギーの流れが，反射波と透過波のエネルギーの流れの和に等しいこと，つまり，エネルギーが保存されることを示せ。