電磁気学 III　試験問題　　　2005 年 2 月 7 日

学籍番号　　　名前

1　電磁波の性質

ローレンツゲージで表わした等方的な (電荷・電流がない) 自由空間の電磁ポテンシャルは、

$$(\triangle - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2})\,\boldsymbol{A} = 0, \quad (\triangle - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2})\,\phi = 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

をみたす。これを解いて電磁ポテンシャルが得られると、以下の式で電磁場を求めることができる。

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi, \quad \boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}. \tag{3}$$

ここでは、次のような形の電磁波について考える。

$$\boldsymbol{A} = (\ A_x(s), A_y(s), A_z(s)\ ),\ \ s = t - z/v,\ \ v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} > 0 \tag{4}$$

微分可能な関数 $A_x(s), A_y(s)\ A_z(s)$ と、それらの微分形 $A'_x(s), A'_y(s), A'_z(s)$ を使って、以下の問いに答えよ。

問 1. 電磁波の伝播する向きについて、理由とともに答えよ。

問 2. スカラーポテンシャル ϕ を求めよ。

問 3. 電場 $\boldsymbol{E}$を求めよ。

問 4. 磁場 $\boldsymbol{B}$を求めよ。

問 5. 電場と磁場の直交性を証明せよ。

問 6. 電磁場のエネルギー密度を求めよ。

問 7. ポインティングベクトル $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ を求めよ。

問 8. 以上より、ポインティングベクトルの物理的意味を述べよ。

2　磁場のエネルギー

電磁場のエネルギー密度は、$\dfrac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \dfrac{1}{2\mu}\boldsymbol{B}^2$ と表わすことができる。第 1 項が電場のエネルギー密度であることは、コンデンサーに蓄えられるエネルギーと比較した 11 月の問題で確認した。 ここでは、図 1 のようなソレノイドコイルに蓄えられるエネルギーと比較して，第 2 項が磁場のエネルギー密度であることを示そう。

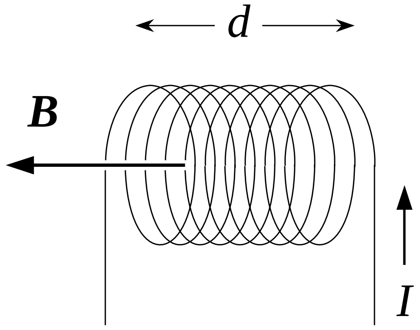

図 1: ソレノイドコイル

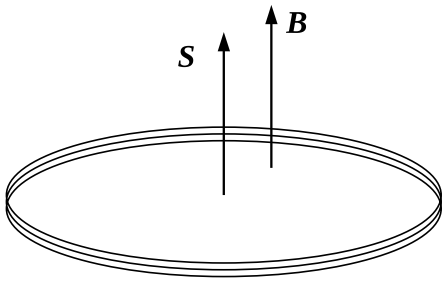

図 2: N 回巻きのコイル

問 1. 大きさが B の一様な磁場中に、面積 S の 1 回巻の円形コイルを、円の法線ベクトルと磁場の向きが一致するように置く。 この円形コイルを貫く磁束 Φ を求めよ。

問 2. 図 2 のように円形コイルが N 回巻きの場合、コイルを貫く磁束 Φ を求めよ。

問 3. 図 1 のように、ソレノイド (断面積 S、長さ d、単位長さあたりの巻数 n) に電流 I を流すと、コイル内部に大きさ $B = \mu n I$ の一様な磁場が発生する。 このときソレノイドを貫く磁束を、電流を使って表わせ。

問 4. ここでは、自己インダクタンス L の定義 $\Phi = LI$ を使って、ソレノイドに発生する誘導起電力を求める。 電流をゼロから I まで時間変化させる場合、ソレノイドに発生する誘導起電力は、$V = \boxed{\quad a \quad}$ である。 ここで、$\dot{I}$ は電流の変化率である。電位差 V のところに微小な電荷量 dq を移動するための仕事量は $\boxed{\quad b \quad}$ である。以上より、ソレノイドに流れる電流を I まで増やすのに必要なエネルギーを求めよ。

問 5. ソレノイドに蓄えられるエネルギー $\dfrac{1}{2}LI^2$ を、ソレノイド内の磁場 B を使って表わせ。 また、磁場のエネルギー密度が、$\dfrac{1}{2\mu}\boldsymbol{B}^2$ であることを示せ。