電磁気学 III　理解度確認問題　　学籍番号　　　　　　　　　　　　　　名前

1. 電磁場のエネルギー保存則

マクスウェルの方程式を使って、電磁場のエネルギー保存則、$-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{B}^2) = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} + \mathrm{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$、を導け。また、エネルギー保存則の各項の物理的意味を述べよ。

2. 電荷にした仕事

電荷 Q をコンデンサ (容量 C、電極の面積 S、電極間の距離 d) に蓄えるためにした仕事が、$\frac{1}{2}CV^2$ になることを示せ。

コンデンサに電荷 Q' がたまっているとき、コンデンサの電極間の電位差は、Q'/C である。そこに dQ' だけの電荷を加えるのに必要な仕事は、$dW = Q'/CdQ'$ になる。 したがって電荷のたまっていないコンデンサに電荷 Q を蓄えるのに必要なエネルギーは、

$$W = \int_0^Q \frac{Q'}{C}dQ' = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2, \tag{1}$$

である。

3. 電極間の電場のエネルギー

前問の結果を利用し、コンデンサに蓄えられたエネルギーを、電極間の電場 E を使って書き表せ。

電荷 Q が蓄えられたコンデンサの電極間には、$E = Q/\varepsilon S$ の電場が発生する。コンデンサの容量は、$C = \varepsilon S/d$ なので、前問で得られた式に代入すると、

$$W = \frac{1}{2}\frac{d}{\varepsilon S}(\varepsilon ES)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd \tag{2}$$

が得られる。

したがって、単位体積あたりの電場のエネルギーは、$\frac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{E}^2$ になる。