電磁気学 III　試験問題　　2004 年 2 月 2 日

1　電磁場の保存則

等方的な定数である誘電率 ε と透磁率 μ で表される空間におけるマクスウェル方程式 (1) を参考にし、以下の問いに答えよ。必要であれば、$\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$ を使ってもよい。

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0, \tag{1}$$

1.1　電磁場のエネルギー (10 点)

電磁場のエネルギー保存則を、マクスウェルの方程式から求めよ。

1.2　電荷保存則 (10 点)

１次元の導線に電流が流れている場合について、電荷保存則, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, を導け。

1.3　保存則 (15 点)

電磁場のエネルギー保存則と電荷保存則を比較し、各項の物理的意味を述べながら両保存則を説明せよ。

2　電磁波の性質

電磁波の電場が、任意の 2 階微分可能な関数 E_+, E_- により次のように表されるとき、以下の問いに答えよ。

$$\boldsymbol{E} = (E_+(t - z/v) + E_-(t + z/v),\ 0,\ 0), \tag{2}$$

2.1　磁場成分 (5 点)

電磁波の電場 (2) に対応する磁場を、マクスウェルの方程式 (1) を使って導け。

2.2　電磁波のエネルギー (5 点)

電磁波のエネルギー密度を求めよ。

2.3　ポインティングベクトル (5 点)

上の電磁波に対し、ポインティングベクトルを求めよ。

2.4　電磁波の性質 (5 点)

前問までの結果を使って、電磁波の性質について述べよ。

3　共振回路

図 1 のように、交流電源と抵抗 R、コイル L、コンデンサー C を直列につないだ。電源は交流電圧 $V = V_0 \cos \omega t$ を出力し、回路には電流 I が流れる。

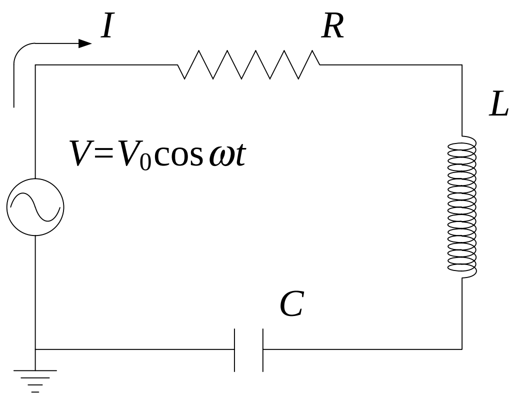

図 1: 直列共振回路

3.1　抵抗 (5 点)

抵抗の両端の電位差 V_R は RI と表される。
このように表される理由を物理的に説明せよ。

3.2　コイル (5 点)

自己インダクタンス L のコイル両端の電位差 V_L は、LdI/dt と表される。このように表される理由を物理的に説明せよ。

3.3　コンデンサー (5 点)

静電容量 C のコンデンサー両端の電位差 V_C は、Q/C と表される。このように表される理由を物理的に説明せよ。ここで、Q はコンデンサーに蓄えられる電荷で、$dQ/dt = I$ の関係がある。

3.4　微分方程式 (5 点)

電圧のつりあいを考え、回路に流れる電流 I の みたすべき方程式を導け。

3.5　電流 (5 点)

電流を複素表示 $I = I_0 \exp i(\omega t + \theta)$ して、前問の方程式を解け。ここで、I_0 と θ は実数である。

3.6　グラフ (10 点)

上で求めた電流の振幅 I_0 と位相 θ を、角周波数 ω の関数としてグラフに描け。

3.7　エネルギー (10 点)

上の微分方程式を変形すると、$RI^2 + \frac{d}{dt}\{\frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2C}Q^2\} = VI$, と書くことができる。 この式の物理的意味を説明せよ。