電磁気学 III　試験問題

1　電気双極子放射

真空中で単振動している電荷 q の荷電粒子から放射される電磁波について、以下の問いに答えよ。以下、真空の誘電率と透磁率を ε_0, μ_0 で、光速を c で表わす。デカルト座標 (x, y, z) の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ と、球座標 (r, θ, ϕ) の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ は、以下の関係にある。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_r &= \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z, \\ \boldsymbol{e}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y - \sin\theta\,\boldsymbol{e}_z, \quad (1) \\ \boldsymbol{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y. \end{aligned}$$

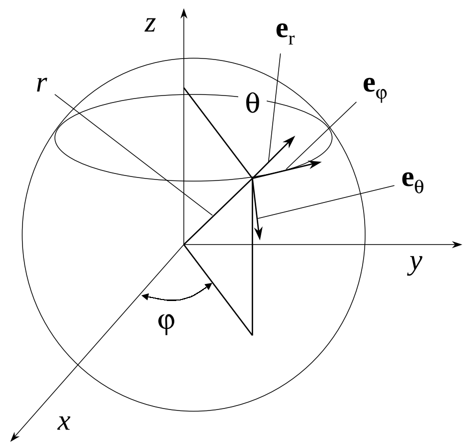

図 1: 球座標

球座標における微分演算子は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}\,\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad (2) \\ \mathrm{rot}\boldsymbol{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\{\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\{\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\}\boldsymbol{e}_\varphi. \qquad (3) \end{aligned}$$

また、マクスウェルの方程式をみたす電磁場は、電磁ポテンシャルによって次のように表される。

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi. \qquad (4)$$

1.1　微分演算 (5 点)

デカルト座標において、$\mathrm{grad}\,r$ を計算せよ。ただし $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である。

1.2　電磁ポテンシャル (20 点)

z 軸上を振幅 ℓ で $z = \ell\sin\omega t$ のように振動する荷電粒子による、観測点 (x, y, z) における電磁ポテンシャルは、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) &= \boldsymbol{e}_z\,\frac{\mu_0 q\ell\omega}{4\pi r}\cos\omega(t - r/c), \qquad (5) \\ \phi(\boldsymbol{x}, t) &= z\,\frac{\mu_0 q\ell\omega c}{4\pi r^2}\cos\omega(t - r/c), \qquad (6) \end{aligned}$$

と表される。このとき、電磁ポテンシャル $\boldsymbol{A}(r, \theta, \varphi, t) = (A_r, A_\theta, A_\varphi)$, $\phi(r, \theta, \varphi, t)$ を球座標表示せよ。以下、必要であれば、 $\ell \ll 2\pi c/\omega \ll r$ の関係を使ってもよい。

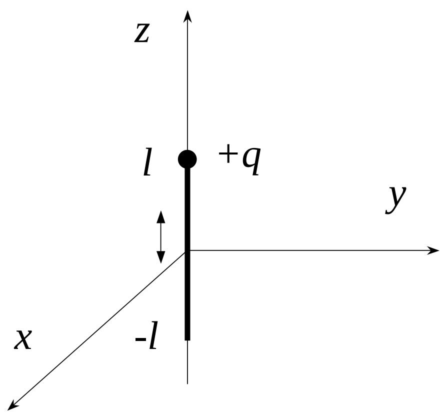

図 2: 荷電粒子の単振動

1.3　放射される電磁場 (10 点)

荷電粒子の運動によって放射される電磁場 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}$を、球座標表示で求めよ。

1.4　ポインティングベクトル (10 点)

ポインティングベクトル $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ を求め、その物理的意味を述べよ。

1.5　放射強度 (15 点)

放射電磁波強度 [W/m^2](に比例する量) の角度依存性をグラフに描け。

2　電磁波の重ね合わせ

2.1　直交して振動する荷電粒子 (25 点)

2.1.1　位相が π/2 だけ異なる場合

前問の荷電粒子に加え、電荷 q の荷電粒子を y 軸上で $y = \ell \cos \omega t$ のように振動させた。 次の 2 方向に放射される電磁波の特徴を、電場ベクトルの時間変化を図示しながら述べよ。

$$(\theta, \phi) = (\pi/2, 0), \qquad (\theta, \phi) = (\pi/2, \pi/2)$$

2.1.2　同位相の場合

追加する荷電粒子の振動が $y = \ell \sin \omega t$ のとき、$(\theta, \phi) = (\pi/2, 0)$ 方向に放射される電磁波の特徴を、電場ベクトルの時間変化を図示しながら述べよ。

2.2　重ね合わせ (15 点)

マクスウェルの方程式を念頭にし、電磁波の重ねあわせが可能な根拠を述べよ。