電磁気学III – 理解度確認問題 –

マクスウェル方程式を参考にして、以下の問いに答えよ。

1. $\mathrm{div}\ \boldsymbol{D} = \rho$
2. $\mathrm{div}\ \boldsymbol{B} = 0$
3. $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$
4. $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \partial \boldsymbol{D}/\partial t$

1　電磁ポテンシャル

電磁場を電磁ポテンシャルで表すと、次のようになる。

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\ \phi, \qquad \boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}.$$

これがマクスウェル方程式の2.と3.を満たすことを、デカルト座標におけるベクトルの成分 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ に対し、公式を使わずに計算して示せ。

2　ガウスの法則

ベクトル $\boldsymbol{D} = (x, y, 0)$ の発散を求めよ。また、$\boldsymbol{D}$ をグラフに図示し、マクスウェル方程式との関連について述べよ。

3　アンペール・マクスウェルの法則

ベクトル $\boldsymbol{H} = (-y, x, 0)$ の回転を求めよ。また、$\boldsymbol{H}$ とその回転をグラフに図示し、マクスウェル方程式との関連について述べよ。

4　補足

問題 2 に関して、実際の静電場との関連を補足する。 電荷 q が原点に存在するとき電位は

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{1}$$

であり、電場は、

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x, y, z), \tag{2}$$

になる。 特異点となる原点を除いて $\mathrm{div}\boldsymbol{E}$ を求めると次のようになる。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r^3}) = 0. \tag{3}$$

原点を中心とする半径 r の球体 V で $\mathrm{div}\boldsymbol{E}$ を求めるため、以下の積分を評価する。

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{E}\ \mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{4}$$

これに式 (2) と $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = (x, y, z)r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ を代入すると、

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{E}\ \mathrm{d}V = \frac{q}{\varepsilon_0}, \tag{5}$$

になる。 $r \neq 0$ の空間で $\mathrm{div}\boldsymbol{E}$ がゼロで、原点を含む空間で積分が有限の値になるので次のように表される。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}). \tag{6}$$

もっとも単純な「電荷による電場」の発散を計算する問題では、解答が難しくなってしまう。そこで $(x, y, 0)$ という場で発散を計算し、発散のイメージを作ることを目的とした。解説したように、

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 2, \qquad \text{(次元を考慮していない)} \tag{7}$$

になるので、いたるところ電荷が存在している場に相当する。 原点にのみ電荷が存在しているように見えるが、$\boldsymbol{D} + (1, 0, 0)$ のように一様な場を加えると、見た目の湧き出し口が平行移動しているのがわかる。