# 電磁気学 III 試験問題 学生番号　　　　　　　　　　　氏名

## 1　ベクトル解析 (基礎中の基礎：配点 20)

### 1.1　微分演算子

講義中にも頻繁に現れた次の微分演算子を書きなさい。必要であれば スカラーは $f$、ベクトルは $\boldsymbol{A}$、ベクトルの成分表示はデカルト座標 $(x, y, z)$ を使うこと。

- 勾配：
- 発散：
- 回転：
- ラプラシアン：

## 1.2 計算問題

次の計算をしなさい。適宜、途中の計算も書きなさい。

1. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ のラプラシアンを求めよ。

2. $1/r = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ の勾配を求めよ。

3. ベクトル $\boldsymbol{A}(x, y, z) = (x, y, 0)$ の発散を求めよ。また $\boldsymbol{A}$をグラフに図示せよ。

4. ベクトル $\boldsymbol{A}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ の回転を求めよ。また $\boldsymbol{A}$とその回転をグラフに図示せよ。

学生番号　　　　　　　　氏名

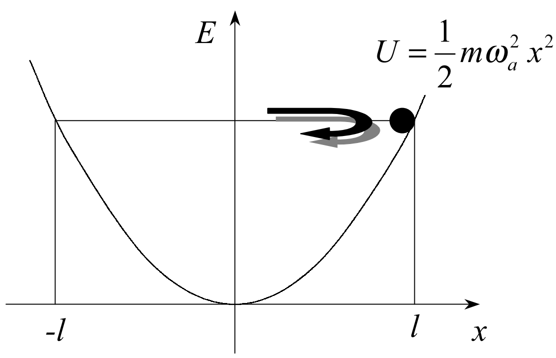
## 2　物質による電磁波の吸収 (総合問題)

以下の文章を読み、空欄を埋め、下線の内容について問いに答えよ。

### 2.1　電磁波に対する原子の応答 (配点 45)

電磁波を吸収する原子のモデルとして、ばねに固定された 1 次元の荷電粒子 (電荷 $q$, 質量 $m$) を考える。荷電粒子は電子を、ばねの弾性力はクーロン力により電子を束縛する力を模している。ばねによるポテンシャルエネルギーを $U = \frac{1}{2}m\omega_a^2 x^2$ とすると、外部から電磁場がかかっていない場合に荷電粒子に働く力 $\boldsymbol{F}_0$ は、$x$ 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x$, 粒子の位置を $x_a$ と書けば

$$\boldsymbol{F}_0 = -\mathrm{grad}\, U = -\boldsymbol{e}_x \boxed{\;a\;}, \tag{1}$$




である。この力によって粒子は単振動し、運動エネルギー $T$ とポテンシャルエネルギー $U$ は時間変化するが、全エネルギー $W = T + U$ は保存され、

$$W = \boxed{\;b\;}, \tag{2}$$

である。ここで $\ell$ は単振動の振幅である。電磁波を照射した場合、荷電粒子に働く力 $\boldsymbol{F}_1$ は

$$\boldsymbol{F}_1 = \boxed{\;c\;} + \boxed{\;d\;}, \tag{3}$$

である。第 1 項は電場 ($\boldsymbol{E}$) 中の荷電粒子に働く力で、第 2 項は磁場 ($\boldsymbol{B}$) 中で荷電粒子が速度 $\boldsymbol{v}_a$ で運動する際の力である。以降 [1]<u>$|\boldsymbol{v}_a|$ が光速より十分に小さいとして第 2 項を無視する</u>。ところで荷電粒子が振動すると、電磁波を放射してエネルギーを失う。単位時間あたりのエネルギー損失量は、講義で習ったように、$(q^2\ell^2\omega_a^4)/(12\pi\varepsilon_0 c^3)$ である。これは荷電粒子のエネルギー $W$ に比例するので

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\mathit{\Gamma}\, W, \quad \mathit{\Gamma} = \boxed{\;e\;}, \tag{4}$$

と書くことができる。時間が $T(= 1/\mathit{\Gamma})$ 程度経過すると荷電粒子は、そのエネルギーの大半を失う。寿命 $T$ が単振動の周期より十分に長い ($\omega_a T \gg 1$) 場合、電磁波放射によるエネルギーの損失を、調和振動子の運動方程式に摩擦力 $\boldsymbol{F}_2 = -m\mathit{\Gamma}\boldsymbol{v}_a$ として組み入れることができる。以上より、電場が $x$ 軸に偏った電磁波 ($\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_x$) が入射した場合の荷電粒子の従う運動方程式 ($\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$) は次のようになる。($\dot{x} \equiv \partial x/\partial t$, $\ddot{x} \equiv \partial^2 x/\partial t^2$)

$$m\ddot{x}_a + m\mathit{\Gamma}\dot{x}_a + \boxed{\;f\;}\, x_a = \boxed{\;g\;}. \tag{5}$$

次に電磁波 $E = E_0 \cos(\omega t - kz)$ を照射し、座標原点 $(z = 0)$ に存在する原子の状態を調べる。つりあいの位置 $(x_a = 0)$ にいた荷電粒子は、電磁波の入射により強制的に振動させられて

$$x_a = x_0\,(u\ \cos\omega t - v\ \sin\omega t), \tag{6}$$

になったとする。これを運動方程式 (5) に代入して、 $\ddot{u} \ll \omega^2 u,\ \ddot{v} \ll \omega^2 v,\ \mathit{\Gamma}\dot{u} \ll \omega\dot{v},\ \mathit{\Gamma}\dot{v} \ll \omega\dot{u}$ を使って微小量を無視し $\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ についてまとめると、次のような $u$ と $v$ の式になる。

$$\dot{u} = -\boxed{h}\,v - \boxed{i}\,u \tag{7}$$

$$\dot{v} = \boxed{j}\,u - \boxed{k}\,v - \boxed{l}\,. \tag{8}$$

ここで原子の共鳴周波数 $(\omega_a)$ 付近の電磁波を照射する場合について興味があるので、$\omega \approx \omega_a$ を使って、$\omega_a^2 - \omega^2 \cong 2\omega(\omega_a - \omega) = 2\omega\mathit{\Delta}$ とした。この方程式から、電磁波の照射を始めた直後は $u, v$ が過渡的に時間変化するが、その後 $T$ 程度の時間で定常値に落ち着くことがわかる。そこで $\dot{u} = 0,\ \dot{v} = 0$ とおいて [2]定常値を求める と、

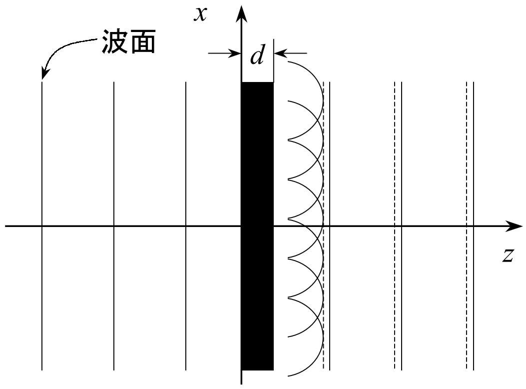
$$u = \kappa E_0 \frac{\mathit{\Delta}}{\mathit{\Delta}^2 + (\mathit{\Gamma}/2)^2}, \qquad v = -\kappa E_0 \frac{\mathit{\Gamma}/2}{\mathit{\Delta}^2 + (\mathit{\Gamma}/2)^2}, \tag{9}$$

になる。ここで $\kappa = q/2m\omega_a x_0$ である。以上のように荷電粒子が電磁波によって振動を始め、その結果、電磁波を放射するようになることがわかった。

**問 1** 無視できる理由を述べよ。

**問 2** $u, v$ の $\Delta$ 依存性をグラフに図示せよ。

## 2.2　電磁波の吸収 (配点 35)




ここでは $u, v$ の物理的意味を理解するため、図のように多数の原子が厚さ $d$ の無限平板に密度 $N$ で存在し、平面波 $\boldsymbol{E}_i = E_{i0}\cos(\omega t - kz)\boldsymbol{e}_x$ が平板に垂直に $z < 0$ から入射した場合を考える。ここでも前項のように定常状態を扱う。つまり電磁波が照射されて十分に時間が経過した後、物質を通過する電磁波の様子を調べる。入射電磁波に誘起された荷電粒子の振動により放射される電磁波は球面波だが、原子が平板上に分布すると個々の球面波が干渉して平面電磁波になっている。よって $z$ 軸方向の 1 次元の問題になる。平板内は電気的に中性で荷電粒子の運動は個々の原子周りに限られるので、伝導電流 · 電荷のないマクスウェル方程式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \boxed{\quad m \quad}, \qquad \mathrm{div}\boldsymbol{B} = \boxed{\quad n \quad},$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{10}$$

を解く。平板内では原子集団の分極 $\boldsymbol{P} = Nqx_a\boldsymbol{e}_x$ が存在し、$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ の関係がある。磁気的には真空と同様に $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$ である。平面波を $\boldsymbol{E} = E(z,t)\boldsymbol{e}_x$ と表すと、電場の回転の成分は

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \left(\boxed{\quad o \quad}, \boxed{\quad p \quad}, \boxed{\quad q \quad}\right), \tag{11}$$

である。したがって式 (10) から [3]<u>次の方程式が導かれる</u>。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E = \frac{Nq}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 x_a}{\partial t^2}. \tag{12}$$

式 (12) を解くため $E(z,t) = E_0(z)\cos(\omega t - kz),\quad x_a = x_0\{u\ \cos(\omega t - kz) - v\ \sin(\omega t - kz)\}$ と置き、これらを代入する。$\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2}, \dot{u}, \ddot{u}, \dot{v}, \ddot{v}$ は他の量に比べ小さいので無視すると、

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) = \frac{Nq\omega_a^2 x_0}{\varepsilon_0 c^2 E_0}\, u = \frac{Nq^2\omega_a}{2\varepsilon_0 mc^2}\frac{\varDelta}{\varDelta^2 + (\varGamma/2)^2} \tag{13}$$

$$\frac{\partial E_0}{\partial z} = -\boxed{\quad r \quad}\, E_0 = -\frac{\alpha}{2}E_0 \tag{14}$$

を得る。式 (13) については、屈折率を $n$ とし $k = n\omega/c$ を使って、

$$n^2 \approx 1 + \frac{Nq^2}{2\varepsilon_0 m\omega_a}\frac{\varDelta}{\varDelta^2 + (\varGamma/2)^2} \tag{15}$$

と書くことができる。屈折率には $u$ の項が効いていて、入射電磁波の周波数が原子の共鳴周波数に一致した時より、$\Gamma/2$ 程度ずれた時の方が真空の値 $(n = 1)$ からの変化が大きい。式 (14) については、右辺に負号があるので $z$ が大きくなると $E_0$ が小さくなる。つまり電磁波が平板を通過する際に [4]<u>吸収される</u> ことを表している。電磁波の吸収には $v$ の項が効いており、電磁波の周波数が原子の共鳴周波数と一致したときに吸収率が最大になる。

**問 3** 式 (12) を導きなさい。

**問 4** $z$ 軸の正方向に進む電磁波のポインティグベクトルの大きさ $|\boldsymbol{S}|$ を計算により求め、それを図示せよ。