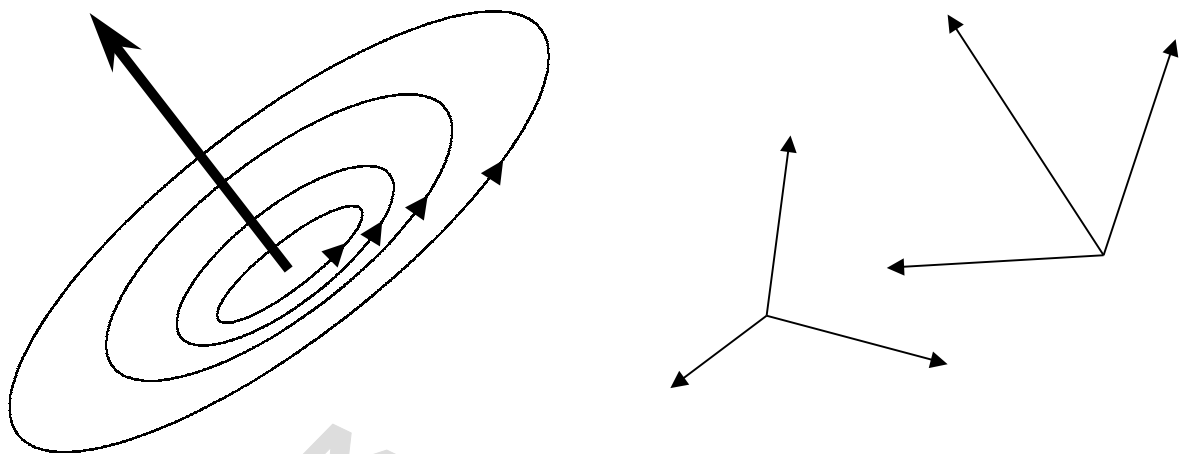


電磁気学 III — Electromagnetism III

(2009 年 2 月 3 日更新)



E **B**
A ϕ

Maxwell
A ϕ **E** **B**

目次

第 1 章	講義の前に	3
第 2 章	電磁誘導	5
2.1	誘導電場 – 磁石を動かした場合	5
2.1.1	磁束の定義	5
2.1.2	電磁誘導の法則 – 積分形	6
2.1.3	電磁誘導の法則 – 微分形	7
2.1.4	トランス	7
2.2	ローレンツ力 – コイルを動かした場合	8
2.3	運動の相対性	9
2.4	自己インダクタンス	9
2.5	静磁場のエネルギー	9
2.6	振動電流	10
第 3 章	マクスウェルの方程式	12
3.1	変位電流	12
3.1.1	アンペールの法則の矛盾	12
3.1.2	変位電流によって発生する磁場	13
3.2	マクスウェルの方程式	14
3.3	電磁場のエネルギーと保存則	14
3.4	電磁ポテンシャル	16
3.4.1	電磁ポテンシャル	16
3.4.2	ゲージ変換	16
3.4.3	ローレンツゲージ	17
第 4 章	電磁波の伝播	19
4.1	自由空間の電磁場	19
4.1.1	z 軸に伝播する電磁波	19
4.1.2	正弦電磁波	21
4.1.3	平面電磁波	21
4.1.4	波の重ね合わせ	22
4.2	電磁波の反射と屈折	23
4.2.1	境界条件	23
4.2.2	スネルの法則	23

4.2.3	入射面に垂直に振動する電場	25
4.2.4	入射面内で振動する電場	26
4.2.5	ブリュースタ角	27
第 5 章	電磁波の放射	28
5.1	球座標	28
5.2	遅延ポテンシャル	29
5.3	電気双極子放射	30
5.3.1	電気双極子のモデル	30
5.3.2	電磁ポテンシャル	30
5.3.3	放射される電磁場	31
5.3.4	アンテナ ●	33
参考文献		35
索引		36

第 1 章

講義の前に

身近な物や現象が、
電磁気学を勉強することによって、いっそう身近になる！

- 講義・評価の方針
 1. 最後の試験で評価する。 合否境界付近では次の項目も考慮する。
 - 不定期に調べる出席
 - 数回おこなう 30 分試験
 2. 講義に関する質問は、できる限り、講義中に受け付ける。
 - 同じ講義を聴けば、同じ疑問を抱くのが普通である。
 - 大勢の前で発言する練習になる。
 3. 講義以外の質問はいつでもどうぞ。
 - 講義終了後、講義室で。
 - オフィスアワーを月～木の午後としたが、なるべく月曜の午後、研究棟 205 号室で。
 - レポート用紙や電子メールなど、得意な方法で。
 - 電子メールによる質問は **Subject** に **電磁気学** と書く。
 4. 黒板に書いたことを写さなくてもよい。
 - 講義ノートを Web で公開する。(講義の進行とともに随時更新する)
 - 今年度の講義では、講義ノートに ● を付した項目を行わない。
 - 「写す」「覚える」より「考える」ことに頭を使う。
 - 特別強調したこと、話すだけで板書しなかったことはメモする方がよい。
- 講義によって身近になる現象
 1. 交流電流と電磁誘導を利用した機器 (トランス、送電線、、、)
 2. 電磁波 (電波) の性質
 - レーザー – 平面波、直進性、単色性
 - 直線偏光の透過 – 直線偏光板、ファラデー回転 (物質科学実験)
 - 直線偏光の反射 – カメラのフィルター、サングラス
 - 直線偏光の散乱 – 空の青さ、赤い夕焼け
- 電磁気学 III の先にある現代の技術
 1. レーザーの原理と原子状態操作
 2. 量子コンピュータ
 3. 磁気共鳴 (NMR) と磁気共鳴映像 (MRI)
 4. 物理の基礎定数と、その精密測定実験

- 次のことに注意して電磁気学を勉強してください。
 1. ベクトルとスカラーの相違を意識する。
 2. 数式の計算も数値を求める計算も、自分の手でノートに書いて、実際に実行する。
 3. 覚えるのではなく、理解する。

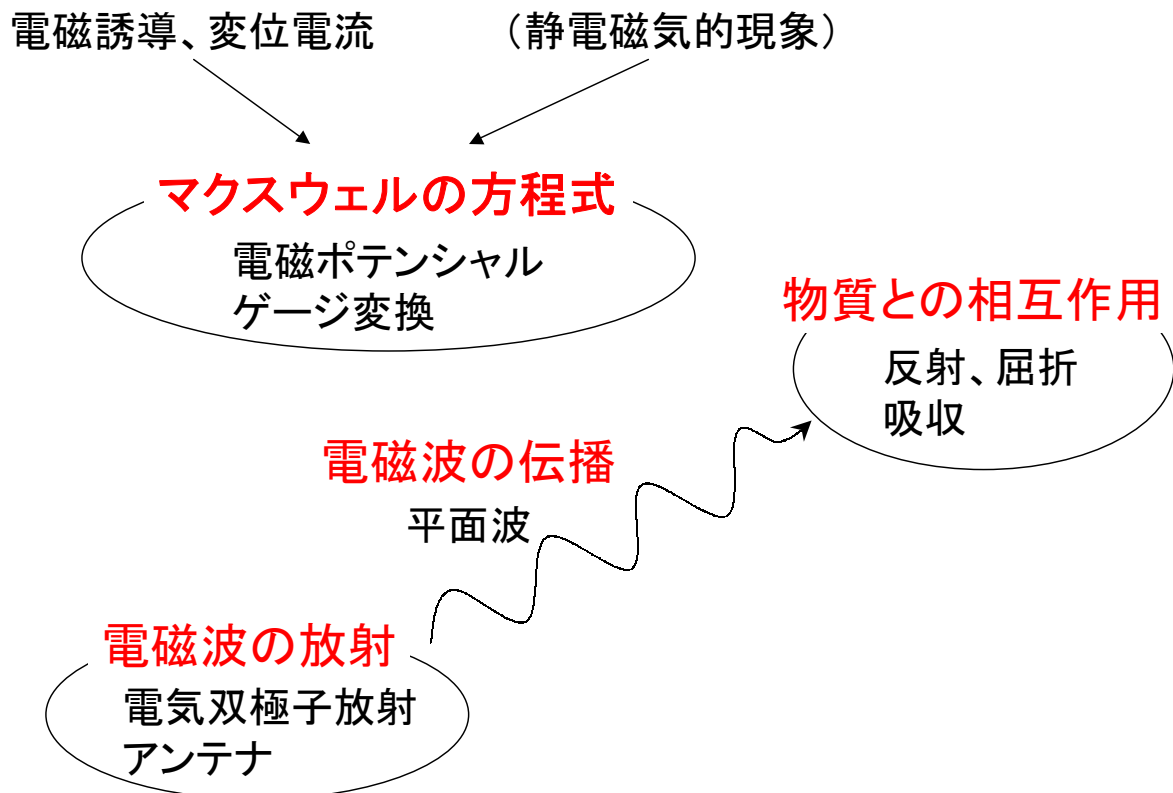


図 1.1 電磁気学 III の内容

第 2 章

電磁誘導

これまででは静電場・静磁場・定常電流を扱ってきたが、ここからは時間とともに変化する電場・磁場を考える。^{*1} 講義では国際単位系 (SI) を使う。^{*2}

2.1 誘導電場 – 磁石を動かした場合

— トランスの動作を理解する —

2.1.1 磁束の定義

keyword — 曲面の向き、ガウスの法則

発電機など電磁誘導を利用した装置では、コイルを貫く磁場を変化させコイルから電流を取り出す。このことを厳密に議論できるようになることが、本章の目的である。

コイル C を貫く磁束 Φ を、次のように定義する。

$$\Phi [\text{Wb}] = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.1)$$

ここで、 $B [\text{T}=\text{Wb}/\text{m}^2]$ は磁束密度、 S は閉曲線 (コイル) C を境界とする任意の曲面である。面積 S の平面状の回路に一樣な磁場が垂直に加えられているとき、式 (2.1) は簡単に表されて、 $\Phi = BS$ である。^{*3} 式 (2.1) が定義として意味をなすのは、右辺の積分が曲面 S の取り方に依らない場合である。そこで、ある閉曲線を境界とする曲面を貫く磁束は曲面 S の取り方に依らないこと、つまり、どんな曲面 S でも式 (2.1) の右辺は同じ値になることを示そう。まず、任意の曲面を代表して、曲面 S_1 と曲面 S_2 について磁束を計算する。それぞれの曲面の向きは、コイル C の向きに右ネジを回したときにネジが進む向きである。そのとき、

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad \Phi_2 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.2)$$

になる。ところで、曲面 S_1 と S_2 に囲まれた領域 V を考え、その領域を囲む曲面を S とすると、ガウスの定理より、

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div} \mathbf{B} \, dV \quad (2.3)$$

になる。曲面 S の向きは、領域 V から外側に向いている。電場におけるガウスの法則を思い出そう。

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div} \mathbf{E} \, dV = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.4)$$

これは、電荷が存在すると電場が湧き出していることを表していた。式 (2.4) で表される量を、電場の発散という。しかし、電荷に相当する単磁荷は存在しないので、磁場には湧き出しがない。つまり磁場についてのガウスの法則は、

$$\int_V \text{div} \mathbf{B} \, dV = 0 \quad (2.5)$$

^{*1} 脚注は、電磁気学について理解を深めたい人のための案内板です。

^{*2} 国際単位系とは、M (長さ), K (質量), S (時間), A (電流), K (温度), mol (物質質量), cd (光度) を基本単位とし、rad (平面角), sr (立体角) を補助単位とする単位系である。MKSA 単位系を E - B 対応 で表わしたものが、SI 単位系である。

^{*3} ベクトルはスカラーと異なることを理解する。

である。領域 V を囲む曲面を一体に考えたときと、 S_1 と S_2 に分けたときとで曲面の正の向きが異なることに注意すると、

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot (-d\mathbf{S}) = \int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = 0 \quad (2.6)$$

であり、閉曲線 C を境界とする任意の2つの曲面で積分量が同じになる。

ガウスの法則からわかること \rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{電気力線は正電荷から負電荷に向かってのびる。} \quad *4 \\ \text{磁束線は必ずループになる。} \end{array} \right.$

2.1.2 電磁誘導の法則 – 積分形

電磁誘導とは、図2.1のように、磁束の変化を妨げる向きに電流が流れるように、起電力が発生することである。^{*5}

(磁束の時間変化率) – (誘導起電力)

$$\frac{d}{dt} \Phi = - \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.7)$$

右辺の積分は、電場をコイルに沿って線積分した量で、電場 E [V/m] の回転と呼ばれる。誘導起電力は静電場・静磁場では現れなかった量で、時間変化する磁場によって初めて現れた。

問題 電場の回転という量を実感するために、一様な電場と円形のコイルについて、積分(2.7)を実行してみよう。

補足 一様つまり渦が無いので、積分量はゼロである。

電磁誘導によって流れる電流について定性的に考える。図2.2のように、円形コイルの中心軸に棒磁石があり、平面 S の向きを図の上側にする。磁石がコイルに近づいている場合、 Φ は負の値で、絶対値が大きくなるように変化しているため、式(2.7)の左辺は負の値である。したがって、電場はコイルの正の向きに誘導される。コイルに流れる電流によって発生する磁場は正の向き、つまり図の上に向いている。これをレンツの法則と呼び、コイルを貫く磁束の変化を弱めるように電流が流れる。

コラム エネルギー保存則の観点から、電磁誘導を考える。

コイルに流れる電流が電球を灯すことができるので、電磁誘導により電気エネルギーが発生している。そこで、電磁誘導の際に働く力を調べよう。磁石がコイルに近づくと、コイルを貫く磁束が増加するので、磁束が増加しないように電流が流れる。コイルは電磁石になり、棒磁石に反発力を与えるので、棒磁石が減速する。つまり、棒磁石の運動エネルギーが電気エネルギーに変換された。磁石がコイルの中央を過ぎた後は、コイルを貫く磁束が負の極小値からゼロに向かうので、電磁誘導による電流が負の向きに流れ、その電流によって発生する磁場は、棒磁石に引力を及ぼす。したがって、磁石の速度は、さらに減少を続ける。

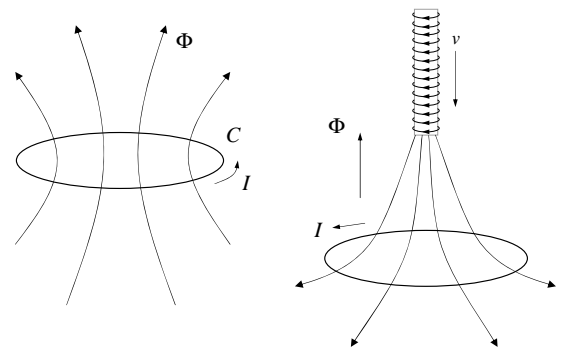


図2.1 電磁誘導：左図：電流 I により磁場が発生する。右図：磁石による磁場が時間変化するとコイルを貫く磁束が変化し、その変化を妨げる向きに電流が流れる。

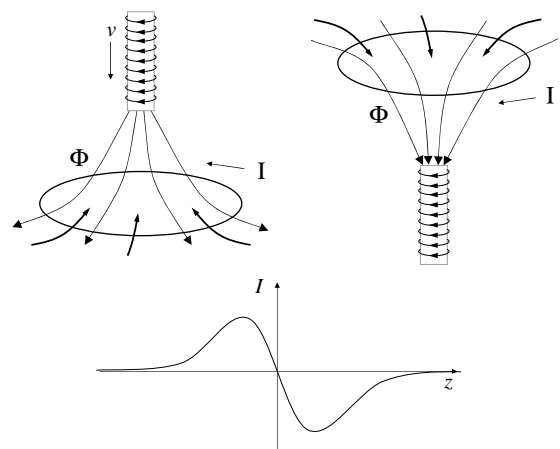


図2.2 コイルが固定され磁石が動く場合

^{*4} $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ の関係より、 \mathbf{H} はループにならない場合も多々ある。ここで、 \mathbf{M} は磁化である。

^{*5} 起電力という名前になっているが、これは「電圧(電位差)」である。

2.1.3 電磁誘導の法則 – 微分形

keyword — 近接相互作用

積分形は遠隔的な表現^{*6}なので、式 (2.7) を微分形に変形して近接作用の表現^{*7}にする。式 (2.7) の左辺に磁束の定義 (2.1) を代入すると、

$$\frac{d}{dt}\Phi = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.8)$$

と変形できる。式 (2.7) の右辺は、ストークスの定理により電場の回転で表される。^{*8}

$$-\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.9)$$

これら 2 式は、任意の曲面 S で等しいので、積分の中身が同じである。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot} \mathbf{E} \quad (2.10)$$

つまり、時間変化する磁場が存在すると電場に回転が存在する。上の例では、たまたま導線を置いたから電流が流れて起電力が生じた事がわかった。しかし、微分系の式 (2.10) は、任意の場所で磁場が時間変化していれば、導線がなくても空間中に起電力 (電場の回転) が生じていることを意味している。これまでは電場・磁場は電荷や電流により発生するのを見てきたが、式 (2.10) とアンペール・マクスウェルの法則^{*9}

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} = \text{rot} \mathbf{H} \quad (2.11)$$

から、次のように言える。

電場・磁場は、時間変化すると互いに伴って存在する。

しかも、その源になった実在である電荷・電流を離れて存在しうる。 → 第5章 電磁波の放射

2.1.4 トランス

— 誘導起電力を具体的に計算してみよう —

通常の電気製品に使われているトランスは、鉄などの磁性体に巻いた 2 つのコイルからなっている。1 次コイルを 100V のコンセントにつなぎ、1 次コイルと 2 次コイルの巻数比によって、入力電圧の 100V から必要な電圧に変換する。ただし、現実のトランスを扱うと電磁誘導に関する議論が見えなくなるので、ここでは、次のような特殊なトランスを考える。

無限に長い直線状導線と同一平面内に、長方形のコイルを長辺を導線に平行に設置する。導線からコイルの近い辺までの距離を l 、コイル長辺を L_1 、短辺を L_2 、コイルの巻数を n とおく。さて、直線状導線に $I = I_0 \sin \omega t$ の交流電流を流すとき、長方形コイルを貫く磁束と誘導起電力を求める。直線状導線から距離 r の点の磁束密度の大きさは、^{*10}、

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (2.12)$$

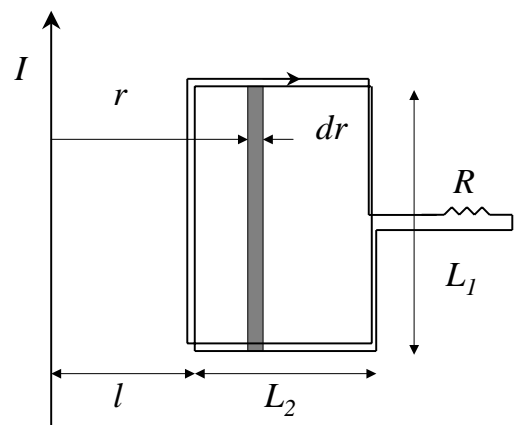


図 2.3 特殊なトランス

^{*6} 積分形の式では、コイルに発生する起電力がコイルから離れた磁束の変化によって瞬間的に生ずる‘ように見える’。

^{*7} 電磁場が光速で伝わる事実を表現するのに適している。

^{*8} ストークスの定理はテキスト [2] P42 ~ 46 を参照

^{*9} 後で習う

^{*10} テキスト [1] p154 または [2] p139 を参照

であり、半径 r の円の接線方向である。^{*11} コイル面上で導線から距離 r 、幅 dr の帯状の平面を貫く磁束は、

$$d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} L_1 dr \quad (2.13)$$

である。したがってコイル全体を貫く磁束は、巻数を考慮して

$$\Phi = \frac{n\mu_0 I L_1}{2\pi} \int_{\ell}^{\ell+L_2} \frac{dr}{r} = \frac{n\mu_0 I_0 L_1}{2\pi} \ln\left(\frac{\ell+L_2}{\ell}\right) \sin \omega t \quad (2.14)$$

になる。式 (2.7) より、起電力は

$$V = -\frac{n\mu_0 I_0 L_1 \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{\ell+L_2}{\ell}\right) \cos \omega t \quad (2.15)$$

である。起電力は直線状導線に流れる電流、コイルの面積と巻数、振動電流の角周波数に依存している。

問題 図2.3にあるように、コイルと直列に抵抗 R をつなぐ。^{*12} コイルに流れる電流は V/R なので、抵抗で消費するエネルギーは単位時間あたり

$$\langle V^2 \rangle / R = \frac{1}{2R} \left[\frac{n\mu_0 I_0 L_1 \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{\ell+L_2}{\ell}\right) \right]^2 \quad (2.16)$$

になる。ここで $\langle \rangle$ は時間平均を表す。ところで、直線状導線に流す電流の振幅を固定し R を小さくすると、式 (2.16) は、抵抗によるエネルギー消費量が限りなく大きくなること示している。これは、エネルギー保存則に反する。このような結論にならないようにするためには、どのように考え直したらよいか。

解答例 上の例題は抵抗無限大の極限で正しい。つまり電流が流れない限り、式 (2.15) で表される起電力が生じる。それでは「電流が流れた」効果をどこに取り入れるのか。それは電流によって発生した磁場である。つまり電流が流れるとコイルを貫く磁束が減少するので、起電力が小さくなる。これが電流無限大にならない理由である。

2.2 ローレンツカ – コイルを動かした場合

電磁誘導は磁石とコイルによって起電力が生じる現象であるが、今度は、磁石を固定しコイルを動かす場合を考える。図2.4のように、動く前のコイルを C 、微小時間 Δt の間に動いたコイルを C' とし、その間の領域の外側に向かう向きを側面の向きとする。(コイル C' を貫く磁束) + (側面を貫く磁束) = (コイル C を貫く磁束) であるので、-(側面を貫く磁束) が「磁束の変化分」である。側面の一部をとり、そこを通過する磁束を $\Delta\Phi_i$ とすると、^{*13}

$$\Delta\Phi_i = -\mathbf{B} \cdot (\delta\mathbf{s}_i \times \mathbf{v}\Delta t) = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \delta\mathbf{s}_i \Delta t \quad (2.17)$$

である。側面すべてについて和をとる ($\Phi = \sum_i \Phi_i$) つまり、コイル C に沿って線積分すると、単位時間あたりのコイルを貫く磁束の変化が、次のように求まる。

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = - \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.18)$$

問題 図2.5のように、一様な静磁場 B 中で、発電機のコイルを角周波数 ω で回転させる。誘導起電力を求めよ。

解答例 時刻 $t = 0$ で磁場がコイル面と平行であるとすると、

コイルを貫く磁束は、 $\Phi = 2alB \sin \omega t$ である。したがって、誘導起電力は、 $-\frac{d\Phi}{dt} = -2a\omega B \cos \omega t$ である。

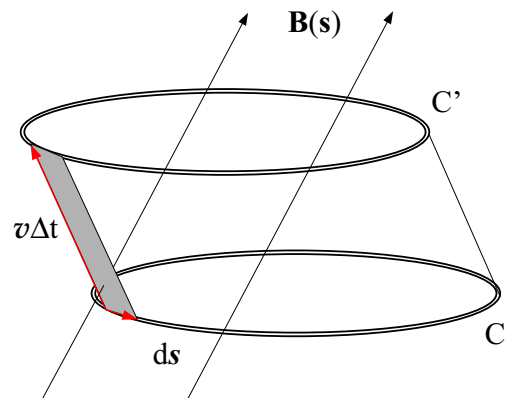


図 2.4 コイルを動かした場合

^{*11} 準定常電流の時間変化は、銅線から磁場の観測点までの距離を光が伝わる時間より十分に遅いとする。変位電流 $\partial D/\partial t$ も無視する。

^{*12} 導線自体の抵抗は小さいとして無視する。

^{*13} $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$

2.3 運動の相対性

相対的に等速直線運動している「磁石に固定した座標系 O 」(コイルを動かした場合)や「コイルに固定した座標系 O' 」(磁石を動かした場合)の、どちらの慣性系から観測しても、コイル内の電子に働く力は同じでなければいけない。^{*14} 座標系 O で電子に働く力は、式 (2.18) より $-ev \times B$ である。座標系 O' で電子に働く力は、電磁誘導の式 (2.7) より $-eE'$ である。つまり、観測する座標系によって、運動によるローレンツ力だったり、電場によるクーロン力だったりしたのだが、これは、観測する座標系によって、電場と磁場が入れ替わっていることによる。

一般に、ローレンツ力を、

$$F = q(E + v \times B) \quad (2.19)$$

と表すと、式 (2.7)、式 (2.10)、式 (2.19) は、同じ現象について述べている。そこで講義では、次のような態度で臨む。近接相互作用を表現している式 (2.10) が電磁気学の基本となる式で、そこから式 (2.7) を導き出すことができる。式 (2.19) は、(特殊相対論の)ローレンツ変換により導くことができる。

2.4 自己インダクタンス

コイルに電流を流すと、図2.1のように、電流により発生した磁束はコイル自身も貫く。各点における磁束密度は電流に比例するので、貫く磁束も電流に比例し、次のように書かれる。

$$\Phi = LI \quad (2.20)$$

ここで、比例係数 L [$H=Vs/A$] を自己インダクタンスと呼ぶ。電流の向きとコイル面の向きの定義より、 L は、コイルの形状により決まる正の量である。次に、電流を変化させると、コイルを貫く磁束が変化するので、誘導起電力

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \quad (2.21)$$

がコイル自身に発生する。負号は、「電流が増えると、誘導起電力は電流が減る向きに作用する」ことを表す。

問題 テキスト [1] の 228 ページの例題 1

2.5 静磁場のエネルギー

時刻 $t = 0$ で電流の流れていない ($I = 0$) コイルに、電圧を加え徐々に電流を流し、時刻 t_1 で電流が I_1 になったとする。式 (2.21) に示すように、コイルには電流の増加を妨げる向きに、大きさ $L\frac{dI}{dt}$ の誘導起電力が生じる。短い時間 dt の間に電荷 $I dt$ を、この電位差に打ち勝って流すためには、

$$dW = L\frac{dI}{dt}I dt \quad (2.22)$$

の仕事が必要である。したがって、コイルに電流 I_1 を流すために必要なエネルギーは、次のようになる。

$$W = \int dW = L \int_0^{I_1} \frac{dI}{dt} I dt = \frac{1}{2} LI_1^2 \quad (2.23)$$

^{*14} ガリレイ変換とガリレイ不変性については 1 年後期の力学 II を参照。さらに完璧には、特殊相対論のローレンツ変換・ローレンツ不変性を参照せよ。

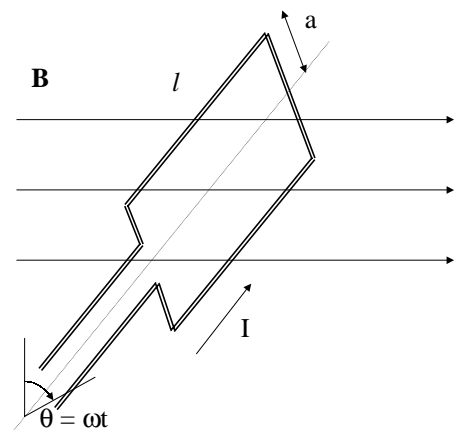


図 2.5 発電機：一様磁場中の回転子

さて、コイルに蓄えられたエネルギーは、コイルによって発生している磁場のエネルギーとみなすことができる。^{*15} コイルがソレノイドの場合、磁場はソレノイド内部の体積 $V = \ell S$ の円柱領域のみに発生していると近似できる。自己インダクタンスは $L = \mu_0 n^2 \ell S$ で、コイル内部の磁束密度は $B = \mu_0 n I_1$ なので^{*16}、

$$W = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V \quad (2.24)$$

と表すことができる。したがって、磁場のエネルギー密度は、次のようになる。

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (2.25)$$

2.6 振動電流

— 楽しんで大きく揺らす —

振動現象はこれまで、「振り子」や「ばね」などを扱う力学の入門コースで登場している。また「音叉(おんさ)」を例に、しばしば共鳴現象が説明される。ここでは電磁気現象として、電気回路の電流(電子)の振動と共鳴について考える。図2.6のように、抵抗、コイル、コンデンサーを直列にし、交流電源につなぐ。直列なので^{*17}、それぞれの素子に流れる電流 I は同一である。回路を一周まわると電位は元に戻るので、

$$RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I dt = V, \quad (2.26)$$

である。左辺第1項が抵抗による電圧降下、第2項がコイルの誘導起電力^{*18}、第3項がコンデンサー電極間の電位差^{*19}である。右辺は、(強制)振動を引き起こす電源電圧である。式(2.26)を時間で微分しておこう。

$$R\dot{I} + L\ddot{I} + I/C = \dot{V}, \quad (2.27)$$

ここでは、2通りの方法で微分方程式(2.26)を解き、定常解を求める。^{*20} 1つめは、電流を

$$I = I_C \cos \omega t + I_S \sin \omega t, \quad (2.28)$$

と置いて、 I_C と I_S を求める。回路は電源によって揺さぶられるので、電流も角周波数 ω で振動するとした。

実際に加える電圧は、 $V_0 \cos \omega t$ のように実数であるが、もう1つの解法では、仮に電流と電圧を複素数と置く。つまり

$$I = I_0 \exp i\omega t = (I_R + iI_I)(\cos \omega t + i \sin \omega t), \quad V = V_0 \exp i\omega t \quad (2.29)$$

と置き、実数の I_R と I_I を、実数 V_0 と ω の関数として求める。

まず、第1の解法で、式(2.27)に式(2.28)を代入し、整理すると、

$$(-RI_S + \omega LI_C - I_C/\omega C) \cos \omega t + (RI_C + \omega LI_S - I_S/\omega C - V_0) \sin \omega t = 0, \quad (2.30)$$

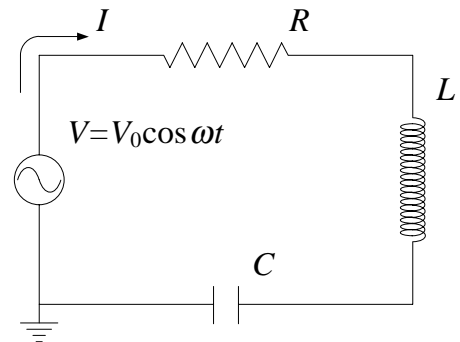


図2.6 振動現象を示す電気回路： R は抵抗、 L はコイルの自己インダクタンス、 C はコンデンサーの容量である。

^{*15} コンデンサーに蓄えられたエネルギーを電極間の空間の静電場エネルギーとみなし静電場のエネルギー密度を $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ としたのと同様に考える。テキスト[1] p121 参照

^{*16} テキスト[1] p177, p229 参照

^{*17} 直列であり、かつ、周波数が低く波長が長いので、電流値は回路のいたるところで同じとみなせる。

^{*18} コイルに交流電流が流れると、コイルを貫く磁束が時間変化するので、コイルの両端に誘導起電力(電位差)が発生する。

^{*19} コンデンサーに蓄えられる電荷は $Q = CV$ と表され、また、回路に流れる電流 I との関係は $dQ/dt = I$ である。

^{*20} 一般解から過渡的応答を除いた特殊解を求める。

である。任意の時刻で式が成り立つためには、 $\cos \omega t$ と $\sin \omega t$ の係数がゼロであることが必要で、それぞれの係数がゼロであれば式は十分に満たされる。そこで、この条件を次のように表わす。

$$\begin{pmatrix} \omega L - 1/\omega C & -R \\ R & \omega L - 1/\omega C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_C \\ I_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_0 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

逆行列を左からかけ、電流を求めると、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} I_C \\ I_S \end{pmatrix} = \frac{V_0}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \begin{pmatrix} R \\ \omega L - 1/\omega C \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

次に複素数を使って、方程式 (2.26) を解く。^{*21} 式 (2.27) に式 (2.29) を代入し、 $\exp(i\omega t)$ を両辺から削除すると、

$$(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C})I_0 = V_0. \quad (2.33)$$

になる。^{*22} したがって、

$$I_R = \frac{R}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} V_0, \quad I_I = -\frac{\omega L - 1/\omega C}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} V_0, \quad (2.34)$$

である。実際に加えている電圧が実数の $V_0 \cos \omega t$ であることを思い起こし、

$$(I_R + iI_I)(\cos \omega t + i \sin \omega t) = (I_R \cos \omega t - I_I \sin \omega t) + i(I_C \cos \omega t + I_R \sin \omega t), \quad (2.35)$$

を使うと、複素数を使って求めた場合、計算結果の実部が式 (2.32) に一致することに納得できる。

さて、計算結果 (2.34) より、複素表示した電流は、

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \exp i(\omega t + \theta), \quad \tan \theta = -\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}, \quad (2.36)$$

と表される。つまり、交流電源の角周波数 ω を変えていくと、 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ のとき電流が最大になる。また、電流の位相は、共鳴した時のみ電源の位相と一致する。このような共振回路は、例えば、電磁波の送信器や受信器で使われる。ある電力の交流電源からアンテナを通して電磁波を効率よく放射するためには、共振回路を使ってアンテナに流れる電流を大きくする。また、微弱な電磁波をアンテナで受けて雑音電流の中から信号を取り出すため、抵抗に流れる特定の周波数の電流を共鳴させる上のような回路が使われる。

問題 上で求めた電流を使って、抵抗、コイル、コンデンサー、それぞれの両端の電位差 $RI, L \frac{dI}{dt}, \frac{1}{C} \int_0^t I dt$ を求めよ。これらの電位差と電源電圧を比較し、共振回路の特徴を述べよ。「共振」「共鳴」とは、一回ごとの刺激は弱くても大きな振動を引き起こす現象である。

コラム 交流電圧の「実効値」という言葉は聞いたことがあるだろうか。例えば、日本の家庭で供給されている 100 V の電圧。交流の何が 100 V なのだろうか。交流電圧は、 $V = V_0 \cos \omega t$ と表わすことができる。西日本であれば、 $\omega/2\pi = 60 \text{ Hz}$ である。 V_0 は、電圧の「振幅」と呼ぶ。壁のコンセントに抵抗 R をつないで、抵抗の消費する電力 W (単位時間当たりの発熱量) を求めると、 $W = \langle VI \rangle = V_0^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle / R$ である。ここで、 $\langle \rangle$ は時間平均を表わす。したがって、 $W = V_0^2 / 2R$ になる。ここで、直流の電圧と同じ表式にするため、 $V_{\text{rms}} = V_0 / \sqrt{2}$ とおき、この V_{rms} を交流電圧の実効値と呼ぶ。だから、実効値が 100 V の家庭のコンセントからは、最大 140 V 程度の電圧が出ていることになる。

^{*21} $d \exp(i\omega t) / dt = i\omega \exp(i\omega t)$

^{*22} 電気回路論では、抵抗、コイル、コンデンサーのインピーダンスを、それぞれ、 $X_R = R, X_L = i\omega L, X_C = 1/i\omega C$ と表わす。このように表現すれば、抵抗の直列接続や並列接続と同様にして、インピーダンスを求めることができる。

第3章

マクスウェルの方程式

3.1 変位電流

3.1.1 アンペールの法則の矛盾

導線を通る定常電流 j に対するアンペールの法則は、

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (3.1)$$

であった。これは、電流が流れていると、その周りに磁場の回転が存在することを示している。しかし、式 (3.1) は成り立たないことがある。図3.1で、交流電流によって発生する磁場を考えてみよう。導線に電流が流れているので、その周りに磁場が発生する。しかし、コンデンサーの間には電流が流れていないので、磁場が発生しないのだろうか？ コイル C を境界とする面 S_1, S_2 を考え、式 (3.1) を面積分する。 S_1 は電流と交差するから C に沿って磁場が発生し、 S_2 は電流と交差しないから C に沿うような磁場は存在しないことになってしまう。

上で述べた矛盾を解消するため、電荷保存則^{*1}を考える。

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.2)$$

アンペールの法則 (3.1) の発散を取ると、左辺は、 $\text{div}(\text{rot } \mathbf{H}) \equiv 0$ 、つまり、恒等的にゼロである。右辺に、電荷保存則 (3.2) を代入する。

$$(\text{右辺}) = \text{div } \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

微小体積内に蓄積している電荷量が時間変化すると、右辺はゼロにならない。そこで、アンペールの法則を修正し、^{*2}

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

とする。式 (3.3) に電場についてのガウスの法則と電荷保存則を適用すると、右辺の発散はゼロになる。^{*3} 電磁場が時間変化

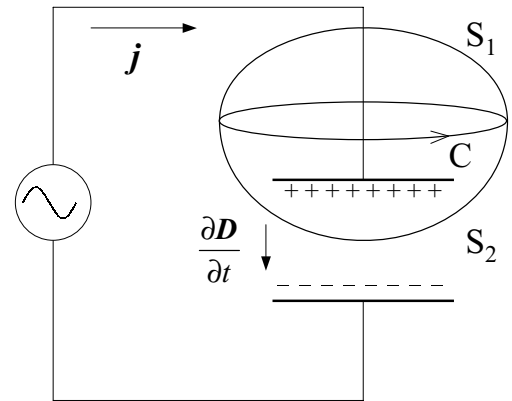


図 3.1 磁場の回転 ($\text{rot } \mathbf{H}$) の面積分は、 S_1 や S_2 などの曲面の取り方に依らない。図に示すコイル C の向きに対応する面の正の向きは、上向きになる。

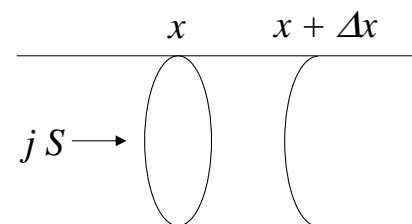


図 3.2 断面積 S の導線に流れる電流と電荷保存則。これは、総電荷量が保存されることを表わす。単位時間に微小体積 $S\Delta x$ に流れ込む電流の総和 $[j(x)S - j(x + \Delta x)S]$ は、電荷の変化量 $[S\Delta x \frac{\partial \rho}{\partial t}]$ に等しい。

^{*1} テキスト [1] P128 参照。流体力学で習う「質量保存則」、量子力学で習う「確率密度保存則」と比較しよう。

^{*2} 真空中では $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ である。誘電体などの物質中では、 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ と表わすことができる。ここで、 \mathbf{P} は電気分極であり、等方的な物質では \mathbf{P} は \mathbf{E} に平行になる。このとき、 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$ である。

^{*3} $\text{div}(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) = \text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\text{div } \mathbf{D}) = \text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

する場合、修正されたアンペールの法則、つまり、アンペール・マクスウェルの法則 (3.3) が、系を正しく記述する。ここで、右辺第 2 項を変位電流と呼ぶ。図 3.1 の回路でコンデンサーにより導線が途切れている場合でも、回路 C 上の磁束密度の回転は、それを貫く電流に比例し面のとり方には依存しない。

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \begin{cases} \int_{S_1} \text{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_{S_1-S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_V \text{div} \mathbf{j} dV \\ \int_{S_2} \text{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\mu_0 \int_{S_1-S_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\mu_0 \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \end{cases} \quad (3.4)$$

磁束の回転は、 S_1 で計算すると j に比例し、 S_2 で計算すると変位電流に比例する、と理解することにより矛盾が解消した。^{*4} 伝導電流 j がなくても変位電流があれば磁場が存在することは重要である。変位電流の存在が電磁波の伝播につながっている。

3.1.2 変位電流によって発生する磁場

面積 S の円板からなる平行板コンデンサーの極板上で、電荷が一様に分布している。電荷量が $Q = Q_0 \sin \omega t$ のように時間変化している場合、コンデンサー内部 (真空) に作られる磁場を求める。極板が十分に大きく電場が極板に垂直になっているとし、導体内部の電場をゼロであると近似する。図 3.3 のように z 軸の正の向きを決めると、ガウスの法則より、極板間の電場は、

$$\varepsilon_0 E = -Q/S \quad (3.5)$$

になる。コンデンサー内部には伝導電流が流れていないので、磁場の回転は変位電流に比例する。極板が円形なので電場も磁場も軸対称に発生する。アンペール・マクスウェルの式 (3.3) の左辺から

$$\int_{S_R} \text{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_{C_R} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi R H \quad (3.6)$$

が求まる。ここで S_R は、極板の同心円 C_R (半径 R) を境界とするコンデンサー内部の面である。一方、右辺は

$$\int_{S_R} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \pi R^2 \frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\pi R^2}{S} \frac{dQ}{dt} = -\frac{\pi R^2 \omega Q_0}{S} \cos \omega t \quad (3.7)$$

である。両者を比較すると磁場は

$$H = -\frac{\omega Q_0}{2S} R \cos \omega t \quad (3.8)$$

である。向きは円 C_R の接線方向 ($H > 0$ では、 xy 平面内で $+z$ に進む右ネジの回転する向き) である。

このようにコンデンサーにたまった電荷で真空中に電場が発生し、その電場が時間変化すると真空中に時間変化する磁場が発生することがわかる。電磁誘導の法則でわかるように、磁場が時間変化すると、その周りに電場の回転が発生する。このように交互に電場と磁場が発生し伝播するのが電磁波である。

コラム 上の例は、電気回路によって空間中に振動する電場と磁場を発生させるものであった。これがもう少し発展するとアンテナになる。ラジオで使われている電波であれば周波数は 80 MHz ぐらいである。電磁気学の講義で

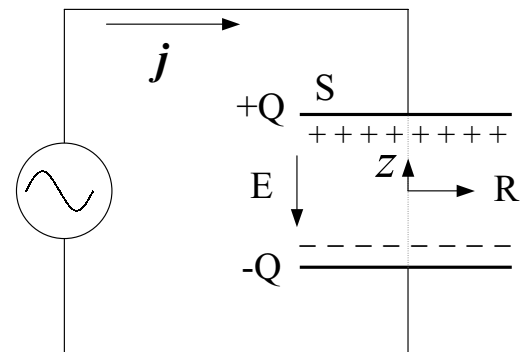


図 3.3 コンデンサー内の電磁場。円形の電極の中心軸を z 軸とし、電極の中心を原点に取る。図中の \mathbf{R} は点 $(x, y, 0)$ を表す位置ベクトルで、その長さは $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ である。

^{*4} 面 S_1, S_2 を独立の面として扱う場合、面の向きを紙面内上方に取る。領域 V を囲む面として扱う場合、 V から外向きが正の向きである。

は、電磁波を理解することが目標の1つである。身の回りの製品、例えば、レーザー、テレビ・ラジオ、携帯電話、などで使われている電磁波と関連付けて理解してほしい。例えば電波がどのように送信・受信されているか、などを考えながら勉強すると興味が湧くでしょう。

問題 上の例題で、真空中のコンデンサーについて具体的に磁場の大きさを求める。電源の電圧(コンデンサーにかかる電圧)は $V = V_0 \sin \omega t$ になるように制御し、 $V_0 = 1 \text{ V}$, $\omega = 2\pi \times 1 \text{ MHz}$, コンデンサーの極板間の距離 $d = 1 \text{ mm}$ のとき、コンデンサー内部の測定点 $R = 100 \text{ mm}$ における磁束密度(単位 T)を計算する。参考までに地球磁場は $40 \mu\text{T}$ 程である。

解答 真空中の平行平板コンデンサーの電気容量は

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (3.9)$$

なので、*5 上の問題の電荷は $Q_0 = CV_0 = \epsilon_0 S V_0 / d$ である。よって発生する磁束密度は、

$$\mu_0 H = \frac{\epsilon_0 \mu_0 \omega R V_0}{2d} \cos \omega t \quad (3.10)$$

と表され、問題の数値を代入すると振幅は 3.49 nT になる。

3.2 マクスウェルの方程式

—これが電磁気学の基本!—

これまで、電場・磁場についてのガウスの法則、電荷保存則、ピオ・サバルの法則など静電場、定常電流・静磁場の法則を習ってきたが、電磁誘導も含めてそれらは**マクスウェルの方程式**としてまとめることができる。表3.1は、現象論的なマクスウェルの方程式である。それぞれの式の意味はこれまでに述べてきたとおりである。

物質中では以下のような関係があるとする。*6

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.11)$$

表 3.1 Maxwell Equations

	ガウスの法則	電磁誘導の法則
電場	$\text{div } \mathbf{D} = \rho$	$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
		アンペール・マクスウェルの法則
磁場	$\text{div } \mathbf{B} = 0$	$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

ここで‘現象論的’と表現しているのは、伝導電流(電気抵抗)・誘電率・透磁率など実験によって求める物質定数で方程式を表しているからである。しばらくはマクスウェルの方程式を解くことが目的となるので、方程式としてのマクスウェルの方程式の性質を調べる。これらは8個の連立偏微分方程式である。*7 一方、 $\rho, \mathbf{j}, \epsilon, \mu$ を与えられた(物質が決まれば決まる)ものとすれば、独立な変数は \mathbf{E}, \mathbf{B} の各成分の6個である。電場と磁場についてのガウスの法則は初期条件として使われるので、*8 方程式の数は6個で過不足なく、解が求まる。

3.3 電磁場のエネルギーと保存則

時間変化する電磁場について、エネルギー保存則を導く。保存量(時間変化しない物理量)を求めるため、マクスウェルの方程式のうち、時間についての偏微分を含む2つの式を利用する。*9 アンペール・マクスウェルの法則の両辺

*5 文献 [2] p. 100 例題 2

*6 一般には ϵ, μ がテンソルになったり \mathbf{E}, \mathbf{H} の関数になったりするが、 \mathbf{D} と \mathbf{E} , \mathbf{B} と \mathbf{H} に何らかの関係が成立する。

*7 ベクトル量とスカラー量を意識しながら、独立な変数の個数を数え上げよう。

*8 文献 [1] p. 258 - 259、または、文献 [2] p. 218 - 220 を参照。

*9 電場と磁場についてのガウスの法則は、初期条件であることを思い出そう。

と E の内積、電磁誘導の法則の両辺と H の内積を求める。

$$\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.13)$$

これらを整理しながら辺々引くと、

$$\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \quad (3.14)$$

になる。現象論的な $(E, D), (B, H)$ の関係式と恒等式^{*10}を使って変形すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = 0 \quad (3.15)$$

になる。これを空間領域 V の内部で積分すると

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 \right) dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV + \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.16)$$

を得る。ここで、第3項はガウスの定理を使い面積分に変形した。静電場と静磁場の類推から、第1項の被積分関数1つめが電場のエネルギー密度で2つめが磁場のエネルギー密度であり、積分は領域 V 内に蓄えられている電磁場のエネルギーを表す。その時間微分は、領域 V 内にある電磁場のエネルギーの単位時間あたりの増加量を表している。^{*11}

第2項はジュール熱である。荷電粒子は通常金属などの母体の格子と衝突しながら進み、その際に格子振動としてエネルギーを母体に与えている。荷電粒子は損失したエネルギーを補うように電場から力を受けて運動しているので、微小体積 dV 内の母体で発生するジュール熱 ΔdW は、

$$\Delta dW = (\text{力}) \times (\text{距離}) = (\rho dV) \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \Delta t = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV \Delta t \quad (3.17)$$

と表される。ここで j は電流密度 $[\text{A}/\text{m}^2]$ であることに注意する。^{*12}

第3項は、領域 V を囲む閉曲面 S を通過して単位時間に系外に流失している電磁場のエネルギーである。ここで、ベクトル

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (3.18)$$

を**ポインティングベクトル**と呼び、 E と H に垂直な単位面積の断面を通過して、毎秒流れ出る電磁場のエネルギーを表している。^{*13}

ここで、電磁場エネルギーの保存を表す式(3.15)を別の角度から眺めよう。式(3.15)においてジュール熱の項がゼロの時、電荷保存則(3.2)と比較する。

$$\rho \rightarrow u = \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2, \quad \mathbf{j} \rightarrow \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

このように置き換えると、両式は同じ形になる。つまり、電荷密度(ρ)に対するエネルギー密度(u)、電流(j , 電荷密度の流れ)に対するエネルギー密度の流れ(S)という関係である。

問題 節3.1.2において解いたコンデンサー内部の電場と磁場について、ポインティングベクトルを計算し、エネルギーの流れについて考察せよ。

^{*10} $\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}$. 文献 [2] p. 228 参照。

^{*11} 静電場では、エネルギーが電荷に付随していると考えても、電場の存在する空間に付随していると考えても、同じ大きさのエネルギーが求められる。しかし、時間変化する場合、ある領域内に電荷や電流が存在しなくても電磁場が存在しうるので、電磁場のエネルギーは空間に付随するものだと考える方が自然である。文献 [3] p. 106 参照。

^{*12} 電流密度の次元は、アンペア・メートル・マクスウェルの法則からも読み取れる。

^{*13} ポインティングベクトルの向きは電磁波の進む向きを表し、電磁波としてエネルギーが流れていることを後に学ぶ。

解答 電場 E は上向き、磁界の強さ H は反時計回りを正としたので、ポインティングベクトル $S = E \times H$ は動径方向内向きが正である。その成分は、 $S = \frac{\omega R Q_0^2}{4\epsilon_0 S^2} \sin 2\omega t$ である。これが正負に振動しているため、エネルギーがコンデンサーから外に流れ出ていないことがわかる。

3.4 電磁ポテンシャル

3.4.1 電磁ポテンシャル

— 電磁場の正体は A と ϕ !! —

マクスウェルの方程式は E, B の 6 個の成分に対する連立偏微分方程式なので、とても複雑である。これを解くため見通しをよくする。静磁場のときと同じように^{*14}、ベクトルポテンシャル A を用いて磁場を表すと、

$$B = \text{rot } A \quad (3.19)$$

なので、磁場についてのガウスの法則は恒等的にみたされる。^{*15} これを電磁誘導の式に代入すると

$$\text{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad (3.20)$$

である。これが恒等的にみたされるのは

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi \quad (3.21)$$

と、おいたときである。^{*16} この A と ϕ を電磁ポテンシャルと呼ぶ。ここまで電磁ポテンシャルのみたすべきは、「微分可能な任意の関数」という条件だけである。さて、これらを決定する方程式はアンペール・マクスウェルの式から^{*17}

$$\left(\Delta - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} - \text{grad}(\text{div } \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t}) = -\mu \mathbf{j} \quad (3.22)$$

であり、電場についてのガウスの法則から次のようになる。

$$\Delta \phi + \text{div}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (3.23)$$

これら 4 個の連立偏微分方程式を解いて A, ϕ を求め、それを式 (3.19), (3.21) に代入して B, E を求める。

3.4.2 ゲージ変換

電磁ポテンシャルを導入したおかげで、マクスウェルの方程式の数が 6 個から 4 個に減少し、少し単純になった。さらに単純にするため、連立方程式の性質に注目する。すなわち、上の電磁ポテンシャルの代わりに、

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi, \quad \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (3.24)$$

のように任意関数 χ で、新たに電磁ポテンシャルを定義する。すると E, B は、新しい電磁ポテンシャルで

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \text{grad } \phi', \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}' \quad (3.25)$$

と表される。つまり、新しい電磁ポテンシャルは、もとの電磁ポテンシャルと同じ電磁場を与えることがわかる。これらをマクスウェル方程式に代入すれば、新しい電磁ポテンシャルのみたす方程式は、

$$\left(\Delta - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A}' - \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}' + \epsilon\mu \frac{\partial \phi'}{\partial t}) = -\mu \mathbf{j} \quad (3.26)$$

^{*14} 文献 [1] P89 静電場の渦なしの法則を参照。

^{*15} 任意のベクトル \mathbf{A} について $\text{div} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = 0$ である。

^{*16} $\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0$

^{*17} $\text{rot } \text{rot } \mathbf{A} = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$. 文献 [2] p 164 参照。

$$\Delta\phi' + \operatorname{div}\left(\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3.27)$$

のように、(3.22)、(3.23) とまったく同じ方程式になる。このことは、電磁ポテンシャルには任意関数 χ だけの不定性があることを意味する。電磁ポテンシャルのこのような変換のことを **ゲージ変換** と呼ぶ。さらに、ゲージ変換で形が変わらないので、電磁ポテンシャルのみたす方程式はゲージ不変である。

3.4.3 ローレンツゲージ

さて、ゲージ不変性を利用し、マクスウェル方程式をさらに単純化してみよう。ただし、ゲージ変換における関数 χ に制限を加える。任意の関数 χ によりゲージ変換しても電磁場 E, B や、電磁ポテンシャル A, ϕ のみたす方程式は変化しない。したがって、制限することにより一般性を失うことはない。

方程式のみたす電磁ポテンシャル A, ϕ からゲージ変換によって新しい電磁ポテンシャルを作る。

$$\mathbf{A}_L = \mathbf{A} + \operatorname{grad}\chi, \quad \phi_L = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (3.28)$$

ただし、関数 χ として微分方程式

$$\left(\Delta - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi = -(\operatorname{div}\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}) \quad (3.29)$$

のみたす関数にする。すると \mathbf{A}_L, ϕ_L は

$$\operatorname{div}\mathbf{A}_L + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi_L}{\partial t} = \operatorname{div}\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t} + \Delta\chi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.30)$$

のみたす。これらからマクスウェル方程式は、

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}_L}{\partial t} - \operatorname{grad}\phi_L, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}_L \quad (3.31)$$

$$\left(\Delta - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A}_L = -\mu\mathbf{j}, \quad \left(\Delta - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi_L = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3.32)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}_L + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi_L}{\partial t} = 0 \quad (3.33)$$

のように単純化された。ここで、式 (3.32) の第 1 式と第 2 式は、それぞれ、式 (3.22) と式 (3.23) に式 (3.33) を代入して得られる。式 (3.32) では、 \mathbf{A}_L, ϕ_L はそれぞれ独立な方程式のみたして、 \mathbf{A}_L の成分についても連立方程式になっていない。そのため 4 個の独立な方程式を解いて、1 組の \mathbf{A}_L, ϕ_L を求め、そのうち式 (3.33) の制限条件を満たすような解を選択し、式 (3.31) で E, B を求める。この式 (3.33) の条件をローレンツ条件という。

ところでローレンツゲージの電磁ポテンシャルも一義的な値を持たない。なぜなら

$$\left(\Delta - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi_L = 0 \quad (3.34)$$

のみたす χ_L でゲージ変換すれば、同じ方程式系が導かれるからである。

問題 電磁ポテンシャルの具体例として、図 3.3 の平行板コンデンサー内の電磁ポテンシャルを求めよ。

解答 電源から電極に供給する電荷が $Q = Q_0 \sin \omega t$ のように時間変化している場合、その電荷によって発生する電場

は、 $E_z = -(Q_0/\varepsilon_0 S) \sin \omega t$ と表される。したがって、スカラーポテンシャルは $\phi = (zQ_0/\varepsilon_0 S) \sin \omega t$ である。ここで電位の原点 ($\phi = 0$) は、電極間の中心 ($z = 0$) に選んだ。また、ベクトルポテンシャルを

$$\mathbf{A} = (0, 0, \frac{\mu_0 \omega Q_0 R^2}{4S}) \cos \omega t, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.35)$$

とおくと、*18

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} = (\frac{\partial A_z}{\partial y}, -\frac{\partial A_z}{\partial x}, 0) = (y, -x, 0) \frac{\mu_0 \omega Q_0}{2S} \cos \omega t \quad (3.36)$$

になり、磁場は式 (3.8) を再現する。この \mathbf{A} , ϕ と式 (3.31) から電場を求めると、

$$\mathbf{E} = (0, 0, \frac{\mu_0 \omega^2 Q_0 R^2}{4S} - \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S}) \sin \omega t = (0, 0, \frac{\omega^2 R^2}{4c^2} - 1) \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S} \sin \omega t \quad (3.37)$$

になる。ここで、 $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ 、 c は真空中の光速である。 E_z の第2項は、電荷によって発生する静電場に対応するものである。第1項は、変位電流によって発生した振動磁場によって生じた電場である。*19 周波数が低いとき、第2項に比べると第1項は無視できることがわかる。*20

次に、ローレンツゲージの電磁ポテンシャルを求める。上で求めた電磁ポテンシャルでは、

$$\text{div} \mathbf{A} = 0, \quad \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\mu_0 \omega Q_0 z}{S} \cos \omega t \quad (3.38)$$

なので、これを式 (3.29) に代入する。

$$(\Delta - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \chi = -\frac{\mu_0 \omega Q_0 z}{S} \cos \omega t \quad (3.39)$$

これをみたく χ ならどんな関数でもよいので、 $\Delta \chi = 0$ になる χ を求め、さらに、位置座標に依存しない特殊解を求めると、

$$\chi = -\frac{Q_0 z}{\varepsilon_0 \omega S} \cos \omega t \quad (3.40)$$

になる。ゲージ変換 (3.28) によって、ローレンツゲージの電磁ポテンシャルは、

$$\mathbf{A}_L = (0, 0, \frac{\mu_0 \omega Q_0 R^2}{4S} - \frac{Q_0}{\varepsilon_0 \omega S}) \cos \omega t, \quad \phi_L = 0 \quad (3.41)$$

になる。 \mathbf{A}_L , ϕ_L から導かれる電磁場は、式 (3.36), 式 (3.37) と同じである。

*18 文献 [2] p142 参照

*19 $(\omega R/2c)^2 = (\pi R/\lambda)^2$ 。つまり、変位電流によって発生する電磁波の波長が極板の大きさに比べて十分に大きくなると、発生する振動電場は電荷による電場より十分に小さい。ここでは、 $\omega R/c$ の高次の項を省略したので、式 (3.36) と式 (3.37) をアンペール・マクスウェルの法則を厳密にはみたさない。正確な解はベッセル関数で表される。

*20 $(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = 0$ である。つまり、極板の端における電磁場の湾曲を無視すると、電磁波のエネルギーの流れの時間平均 $\langle \rangle$ はゼロであり、エネルギーが外部に流出していないことを表している。

第4章

電磁波の伝播

本章ではマクスウェルの方程式を用いて、電磁波の伝わるようす(伝播)、異なる媒質との境界におけるふるまい(反射、屈折)を見る。振動電流(時間の関数)を参考に、波(時間と位置座標の関数)について学ぶ。

4.1 自由空間の電磁場

電荷密度 ρ と電流密度 j がゼロである領域を自由空間と呼ぶことにする。自由空間は必ずしも真空ではない。本節では、自由空間においてマクスウェルの方程式に従って時間・空間変化する電磁場を求める。最初に、電磁ポテンシャルが位置座標 z にのみ依存する場合の電磁波の特徴を調べる。

4.1.1 z 軸に伝播する電磁波

— 波に慣れよう —

ローレンツゲージの電磁ポテンシャルでマクスウェルの方程式を記述し、 ρ, j をゼロとすると、

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (4.1)$$

$$(\Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \mathbf{A} = 0, \quad (\Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \phi = 0, \quad (4.2)$$

$$\text{div } \mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (4.3)$$

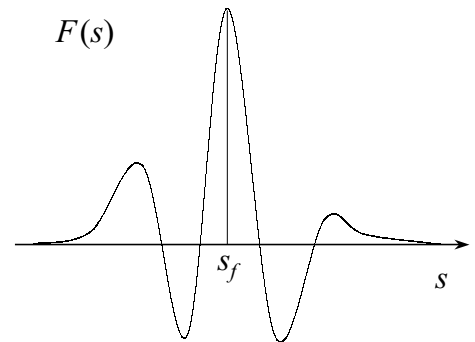


図 4.1 任意形状の波

である。ここで、ローレンツゲージを表す添字 L を省略した。自由

空間が真空の場合は $\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0$ である。式 (4.2) が波動方程式になっていることに注目しよう。^{*1}

電磁ポテンシャルが位置座標 z と時間 t に依存し x と y に依存しない場合、^{*2} つまり、

$$\mathbf{A} = (A_x(z, t), A_y(z, t), A_z(z, t)), \quad \phi(z, t), \quad (4.4)$$

と書かれるとき、式 (4.2) は、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi = 0, \quad (4.5)$$

のように 1 次元の波動方程式になる。ここで、 $1/v = \sqrt{\varepsilon\mu}$ である。この微分方程式の解は、2 階微分可能な任意の関数 $F_i(s), G_i(s)$ ($i = x, y, z$) を用いて

$$A_i = F_i(t - z/v) + G_i(t + z/v), \quad (4.6)$$

と表される。これが波動方程式の解であることは、式 (4.5) に代入することによって確認できる。ここで $F_i(s), G_i(s)$ の性質を調べよう。 $F_i(s)$ が図 4.1 のような形をしていたとき、その極大値を与える s を s_f とする。極大となる点は

^{*1} 1 年後期「波動論」参照。波と異なり、振動は時間 t のみの関数であり、その方程式は式 (2.27) で表される。

^{*2} 電磁ポテンシャルは x や y に依存しないが、ベクトルの成分 A_x や A_y は無視しない。また、 x や y に依存しないとは、 z と t が同じなら x や y が異なっても電磁ポテンシャルの各成分の値が同じであることを表す。

$z = v(t - s_f)$ で表されるように、 $+z$ 方向に速さ v で移動する。同様に $G_i(s)$ では $z = -v(t - s_g)$ のように $-z$ 方向に速さ v で移動する。つまり、 z にのみ依存する電磁ポテンシャルを仮定すると、 z 軸方向に進む波が求まる。波の速さ v は、特に電磁波が真空中を伝播するとき $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ になり、これを真空中の光速という。

A の一般形である式 (4.6) を式 (4.3) に代入すると、次のようになる。

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -v^2 \operatorname{div} \mathbf{A} = -v^2 \frac{\partial}{\partial z} A_z = vF'_z(t - z/v) - vG'_z(t + z/v). \quad (4.7)$$

ϕ も波動方程式 (4.5) をみただけから、 t について積分して出てくる項は t に依存しないだけでなく、 z にも依存しない。つまり、定数である。ここでは時間変化する電磁場に興味があるので、積分定数をゼロとおいて

$$\phi = vF_z(t - z/v) - vG_z(t + z/v), \quad (4.8)$$

と書く。これらの結果と式 (4.1) から電磁場を求めると、

$$\mathbf{E} = \left(-\frac{\partial A_x}{\partial t}, -\frac{\partial A_y}{\partial t}, -\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \left(-\frac{\partial A_x}{\partial t}, -\frac{\partial A_y}{\partial t}, 0\right), \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B} = \left(-\frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z}, 0\right), \quad (4.10)$$

である。このように、電磁ポテンシャルが x, y に依存しないという条件により、電磁波は、 z 軸方向に伝播し、 z 成分がゼロであること ($E_z = 0, B_z = 0$; 横波) が導かれる。

ここで、電場と磁場を、次のように2つの成分に分ける。

$$\mathbf{E} = \left(-\frac{\partial A_x}{\partial t}, 0, 0\right) + \left(0, -\frac{\partial A_y}{\partial t}, 0\right) = -(F'_x + G'_x, 0, 0) - (0, F'_y + G'_y, 0), \quad (4.11)$$

$$\mathbf{B} = \left(0, \frac{\partial A_x}{\partial z}, 0\right) + \left(-\frac{\partial A_y}{\partial z}, 0, 0\right) = -\frac{1}{v}(0, F'_x - G'_x, 0) + \frac{1}{v}(F'_y - G'_y, 0, 0), \quad (4.12)$$

である。それぞれ第1項と第2項は、直交し、かつ、成分間になら関係がないので、独立に考えることができる。^{*3} そこで、電場が x 軸に偏った第1項を取り出し、改めて電場を、

$$\mathbf{E} = (E_+(t - z/v) + E_-(t + z/v), 0, 0), \quad (4.13)$$

とおく。そのとき、対応する磁場は、

$$\mathbf{B} = \frac{1}{v}(0, E_+(t - z/v) - E_-(t + z/v), 0), \quad (4.14)$$

になる。単位体積あたりの電磁場のエネルギーは、 E_+ と E_- の交差項が相殺され、次のようになる。

$$\frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu}\mathbf{B}^2 = \varepsilon E_+^2 + \varepsilon E_-^2 = u_+ + u_-. \quad (4.15)$$

ここで、 $1/v^2 = \varepsilon\mu$ を使った。以上より、次の重要な性質が明らかになる。^{*4}

1. \mathbf{E} と \mathbf{B} は直交する。 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0.$ (4.16)

2. ポインティングベクトル \mathbf{S} はエネルギーの流れを表し、 $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{S}$ は右手系である。また、電磁波は横波である。

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = v^2\varepsilon(0, 0, E_x B_y) = v\varepsilon(0, 0, E_+^2 - E_-^2) = v(0, 0, u_+ - u_-). \quad (4.17)$$

3. 単位体積あたりの運動量は、次のようになる。^{*5}

$$\varepsilon\mu \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{v}(0, 0, u_+ - u_-), \quad (4.18)$$

^{*3} マクスウェル方程式は線型な偏微分方程式なので、解の和(重ね合わせ)も解である。§4.1.4 波の重ね合わせを参照。

^{*4} 式 (4.11) を使うと、ポインティングベクトルと運動量について本文と同じ結果になるが、一般に $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$ である。すれ違う波の電場と磁場が直交しないことはありうる。

^{*5} 真空中では(運動量) = (エネルギー)/ c になるが、量子力学で学ぶように、光子の運動量とエネルギーの関係と同じである。また、特殊相対論では $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$ の関係が導かれるが、光子では静止質量 m_0 がゼロになる。

4.1.2 正弦電磁波

ここまで、任意形状の波を扱ってきた。本項では、さらに単純化し、次のような正弦関数で表わされる電磁波について考える。

$$E_x = E_0 \sin \omega(t - z/v), \quad B_y = \frac{E_0}{v} \sin \omega(t - z/v), \quad (4.19)$$

ここで、書き下していない成分はゼロとする。任意の関数は、多くの正弦・余弦関数の重ねあわせで表すことができる。したがって、ここで扱う正弦波

は、それら多くの波の1つを取り出したものと考えられる(フーリエ変換)。この方法は、さらに、波の速さが周波数に依存する場合にも対応できる。さて、式(4.19)で表される波は、角周波数 ω 、周期 $2\pi/\omega$ 、波長 $\lambda = 2\pi v/\omega$ で $+z$ に進む正弦波である。^{*6} また、次のように変形し、

$$E_x = E_0 \sin(\omega t - kz), \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (4.20)$$

k を波数 (2π [m] の中の波の数)、 $(\omega t - kz)$ を波の位相と呼ぶ。真空中の光速は一定であるが、多くの物質中では周波数と波数が比例関係にない。逆にいえば、分散関係 ($\omega = vk$) を調べるにより、物質の性質を調べることができる。

4.1.3 平面電磁波

任意の方向に伝播する電磁波の電場を

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}^{(1)} E_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (4.21)$$

としてみる。ここで、 $\mathbf{e}^{(1)}$ は電場の偏りを表す単位ベクトル、 E_0 は電場の振幅、 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ である。 z 軸に伝播する電磁波の例では $\mathbf{e}^{(1)}$ は x 軸方向の単位ベクトルであった。^{*7} ベクトル \mathbf{k} を波数ベクトルという。時刻 t_1 で波の位相が一定値 s_0 となる式、

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \omega t_1 - s_0, \quad (4.22)$$

は、 \mathbf{k} に垂直なひとつの平面を表す。^{*8} 時間が経過して $t = t_2$ になると

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \omega t_2 - s_0, \quad (4.23)$$

は、 \mathbf{k} の向きに平行移動した別の平面を表す。位相が一定のこのような平面を波面といい、式(4.21)で表される波は、 \mathbf{k} 方向に進行する平面波という。これに対し、原子のように小さな球状の物質から放射される電磁波は、波面が球状になるので球面波と呼ぶ。3次元空間内の任意の電磁波は、さまざまな向きに進む多くの波長の平面波や球面波の重ねあわせで表すことができる。もう1つの基本的な波である球面波については、第5章で述べる。

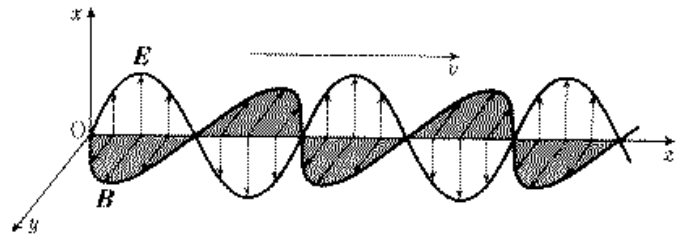


図 4.2 電磁波：電場と磁場の腹と節の位置は同じである。

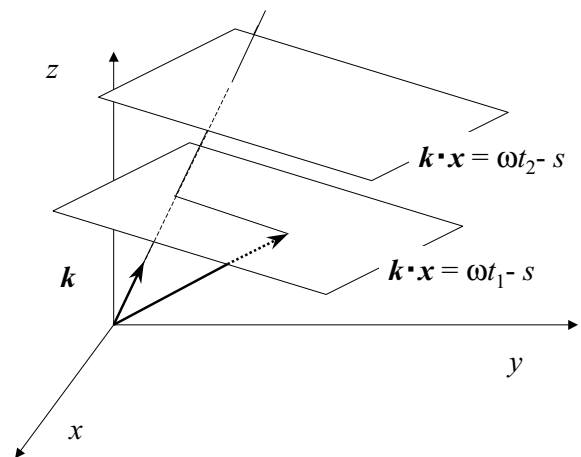


図 4.3 3次元空間の平面波

^{*6} 波には、位相速度と群速度がある。本文中の v は前者であり、図4.1の極大値が動く速さは後者である。

^{*7} z 軸方向に伝播する電磁波の進行方向と偏りのベクトルを回転させると、任意の方向に進行する平面波へ変換でき、その回転はオイラー角で表すことができる。つまり、 z 軸まわりの α 回転 \rightarrow 新しい y' 軸まわりの β 回転 \rightarrow 新しい z'' 軸まわりの γ 回転である。

^{*8} 高校の教科書を開いて、平面の式を復習せよ。

4.1.4 波の重ね合わせ

— ↑ + ↔ = ◯ or ◯ !? —

以上のように電場・磁場が直線的に振動している電磁波を、直線偏波と呼ぶ。それに対し、

$$\mathbf{E}_- = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\cos(\omega t - kz), \sin(\omega t - kz), 0), \quad (4.24)$$

のように振動する電磁波を円偏波と呼ぶ。^{*9} 円偏波は、位相が $\pi/2$ だけ異なる2つの直線偏波の重ねあわせだとみなせ、式(4.11)の特別な場合である。上の円偏波とは逆に回る円偏波

$$\mathbf{E}_+ = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\cos(\omega t - kz), -\sin(\omega t - kz), 0), \quad (4.25)$$

も考え合わせれば、逆に、2つの円偏波の重ねあわせが直線偏波であるとみなすことができる。マクスウェルの方程式は、 \mathbf{E} と \mathbf{B} について線形な偏微分方程式なので、方程式をみたく2つの特殊解の和(重ね合わせ)も解である。

問題 式(4.24)で表される円偏波の磁場成分を求めよ。

解答 式(4.24)を電磁誘導の式に代入する。(ベクトルとスカラーの違いを理解する)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial z}, -\frac{\partial E_x}{\partial z}, 0 \right) = -\frac{kE_0}{\sqrt{2}} (\cos(\omega t - kz), \sin(\omega t - kz), 0). \quad (4.26)$$

これを積分し、次式を得る。

$$\mathbf{B} = \frac{kE_0}{\sqrt{2}\omega} (-\sin(\omega t - kz), \cos(\omega t - kz), 0) = \frac{E_0}{\sqrt{2}v} (\cos(\omega t - kz + \pi/2), \sin(\omega t - kz + \pi/2), 0), \quad (4.27)$$

磁場も波動方程式にしたがうので、時間依存しない積分定数は位置変数 z にも依存しない。ここでは静磁場に興味がないので、積分定数を無視した。磁場も電場と同じ方向に回転するが、位相は $\pi/2$ だけ異なる。また、

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{v\varepsilon E_0^2}{2} (0, 0, 1), \quad (4.28)$$

なので、磁場と電場は直交し、ポインティングベクトルは z 軸の正方向を向いている。円偏波は電場・磁場の大きさが変化せず向きが回転している電磁波であるが、直線偏波の重ねあわせとみなせ、§4.1.1で調べた電磁波の一般的な性質をみたく。

コラム 蜂はダンスによって蜜のありかを仲間に知らせることで有名です。これは蜂の複眼が偏光を検出できることを意味しています。青空を偏光板を透して見ると、確かに光が偏っているのがわかります。太陽と直角方向から来る光の偏りが最も強いので、太陽を基準にして方向を知ることができます。実は偏光を検出できるのは昆虫だけでなく、人の目も偏光を検出できます。^{*10}

^{*9} 分母の $\sqrt{2}$ は、単位体積あたりのエネルギーが直線偏波 $E_0(\cos(\omega t - kz), 0, 0)$ の場合と同じになるように導入している。

^{*10} 文献 [6] 参照。直線偏光を目で見ると、おぼろげに「Haidinger ブラシ」と呼ばれる黄色の「8の字」が見えます。

4.2 電磁波の反射と屈折

電気・磁氣的性質の異なる等方的媒質が接する境界面に電磁波が入射すると、反射や屈折が起こる。ここで媒質は、電荷や電流の存在しない自由空間としよう。図4.4のように、媒質1内を k_i の向きに進む平面波が、媒質1と媒質2の境界に入射する場合を考える [5]。まず、媒質1から境界面に入射する電磁波の電場と磁場を、次のように表わす。

$$E_i = E_{i0} \exp i(\omega t - k_i \cdot x), \quad B_i = B_{i0} \exp i(\omega t - k_i \cdot x). \quad (4.29)$$

これを電磁誘導の式に代入すると、

$$H_i = \frac{k_i \times E_i}{\omega \mu_1}, \quad (4.30)$$

が得られる。ここで、入射波の振幅 E_{i0} は、実数成分のベクトルとする。指数関数も波動方程式の解なので、ここでは電磁波を複素表示した。電場も磁場も物理量なので、複素表示の E_i, H_i の実部が観測量である。

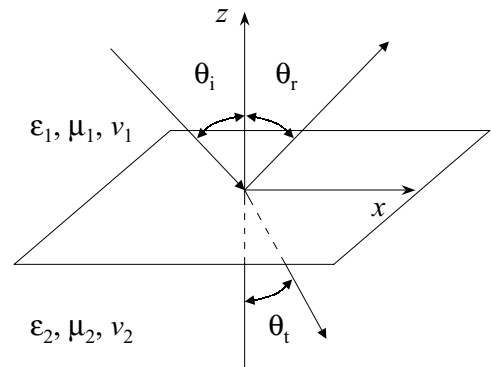


図4.4 平面波の反射と屈折：入射波の波数ベクトルと境界面の法線ベクトルを含む平面を入射面という。

4.2.1 境界条件

境界で誘電率や透磁率が不連続に変化 ($\epsilon_1 \neq \epsilon_2, \mu_1 \neq \mu_2$) しても、電磁場はマクスウェル方程式をみたす。それゆえ電磁場は、不連続に変化することが予想される。ここでは、電磁場が境界でみたすべき条件を求める。境界面には真電荷も伝導電流も存在しないとし、*11 図4.5のように、境界にまたがる長方形 S (面積： $l \times \delta$) について、次の積分量を計算する。

$$\int_S \text{rot } H \cdot dS = \int_S (j + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot dS, \quad (4.31)$$

右辺の被積分関数は領域 S で特異点がないので、 $\delta \rightarrow 0$ の極限で積分はゼロになる。左辺はストークスの定理で線積分になるので、長辺部分の線積分が残る。したがって、 $(H_1 - H_2)l = 0$ である。ここで、 H_i は磁場の接線成分 (大きさと向きが重要) を表わす。電磁誘導の法則を使うと、同様に $(E_1 - E_2)l = 0$ なので、 E と H の接線成分は境界面で連続である。*12

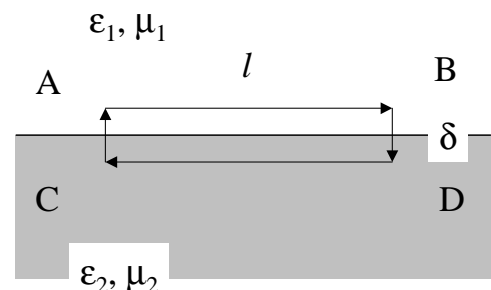


図4.5 境界条件

4.2.2 スネルの法則

— 海の世界はなぜ広い? —

条件「 E と H の接線成分が境界面で連続」は、境界付近で「単一の進行波のみが存在する」ことを認めない。つまり、入射波と透過波だけで境界条件をみたすことはできない。ここでは、境界における電磁波の振舞いを調べるため、境界面付近の入射波、透過波、反射波の3つを考え、境界条件をみたす解を求める。*13 本項では、指数部に注目する。境界面上の任意の点あるいは任意の時刻で境界条件をみたすためには、位相が一致する必要がある。*14 時間の項に注

*11 金属のような良導体ではなく、ここでは、誘電体を考える。多くの誘電体では、良い近似で $\mu_1 = \mu_2$ が成り立つ。

*12 D と B の接線成分は、境界で連続でない。

*13 4つ以上の波で境界条件をみたすことができるかどうかを、ここでは調べない。

*14 媒質1と2における電磁波の吸収を無視する。吸収がある場合、指数部に減衰項を加えることになり、後出の境界条件の表式が変わる。

目すれば、3つの電磁波の周波数が一致していることが要請される。そこで、透過波と反射波を次のように書く。

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t0} \exp i(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{x}), \quad \mathbf{H}_t = \frac{\mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_t}{\omega \mu_2}, \quad (4.32)$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{r0} \exp i(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x}), \quad \mathbf{H}_r = \frac{\mathbf{k}_r \times \mathbf{E}_r}{\omega \mu_1}. \quad (4.33)$$

位置座標の項に注目し、境界面の任意の点 x_b で境界条件をみたすため、

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}_b = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{x}_b = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x}_b, \quad (4.34)$$

が必要である。図4.4のように境界面内に座標の原点を取り、境界面から媒質1側に向かう法線を z 軸とし ($z_b = 0$)、入射電磁波の波数ベクトルを zx 平面内 ($k_{iy} = 0$) にとる。すると、式(4.34)は、

$$k_{ix}x_b = k_{tx}x_b + k_{ty}y_b = k_{rx}x_b + k_{ry}y_b, \quad (4.35)$$

になる。 x_b は境界面上の任意の点 ($x_b, y_b, 0$) なので、これがみたされるためには、3つの波数ベクトルが同一平面内にあることが必要である。言い換えると、 $k_{iy} = 0$ なので $k_{ty} = k_{ry} = 0$ である。したがって、 $k_{ix} = k_{tx} = k_{rx}$ である。さらに

$$|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_r|, \quad v_1 |\mathbf{k}_i| = v_2 |\mathbf{k}_t|, \quad (4.36)$$

$$\frac{k_{ix}}{|\mathbf{k}_i|} = \sin \theta_i, \quad \frac{k_{tx}}{|\mathbf{k}_t|} = \sin \theta_t, \quad \frac{k_{rx}}{|\mathbf{k}_r|} = \sin \theta_r, \quad (4.37)$$

なので、

$$\theta_i = \theta_r, \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_{20}}{n_{10}} \equiv n_{21}, \quad (4.38)$$

である。ここで、屈折率は

$$n_{kl} = \sqrt{\frac{\varepsilon_k \mu_k}{\varepsilon_l \mu_l}}, \quad (4.39)$$

である。以上のように、反射・屈折について、Snellの法則を導くことができた。

上では波の位相部分に境界条件を使った。次節では、振幅についての境界条件から、反射率と透過率を求める。ただし、それらは偏光状態に依存するので、2種類の直線偏光で反射と屈折を調べることにする。任意の偏光については、2つの直線偏光の重ね合わせとして考える。

コラム 空気の屈折率は約1.00で水の屈折率は約1.33なので、空気から水への入射に際し光は屈折して $\theta_i > \theta_t$ になる。逆に水から空気に出てくる光の経路は、図4.6のようになる。鍋やプールの底が浅く見えるのは、水による屈折のためである。また、海に潜ったとき、度のない水中眼鏡でも海の中が広く見えるのも屈折による。

コラム 屈折率の大きな材料でレンズを作ると、メガネを薄くすることができる。媒質1が空気で媒質2がガラスだとすると、 $n_{10} \sim 1.0, n_{20} \sim 1.6$ である。屈折による角度変化は、

$$\theta_i - \theta_t = \theta_i(1 - \theta_t/\theta_i) \sim \theta_i(1 - 1/n_{21}),$$

になる。 $n_{10} < n_{20}$ なので θ_i あるいは n_{20} が大きければ、角度変化が大きくなる。 θ_i が大きいとは縁の厚いレンズを使うこと、 n_{20} が大きいとは屈折率の大きな材料を使うことである。

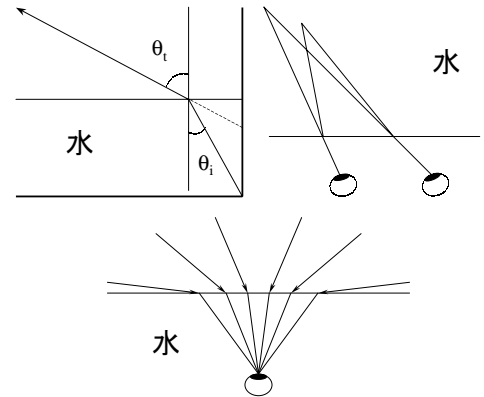


図4.6 屈折と錯覚。左上) 水の屈折率が空気より大きいので、鍋の底が浅く見える。右上) 両目の向きにより方角を知覚するので、光が屈折すると実際よりも海が広く見える。下) 水中から大気側を眺めると、狭い角度内に全天の景色が入る。

4.2.3 入射面に垂直に振動する電場 (s-wave)

入射光の電場が入射面に垂直なとき、境界条件から反射・透過光の電場も入射面に垂直である。^{*15}

$$\mathbf{E}_{i0} = (0, E_{i0}, 0) \longrightarrow \mathbf{E}_{t0} = (0, E_{t0}, 0), \quad \mathbf{E}_{r0} = (0, E_{r0}, 0). \quad (4.40)$$

つまり、どの電場も境界面に平行であり、平行な成分が連続であることが必要なので、次のようになる。

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}. \quad (4.41)$$

磁場は電場と直交するので zx 面内で振動している。境界条件から磁場 \mathbf{H} の接線成分 (x 成分) が連続なので、

$$H_{ix} + H_{rx} = H_{tx} \longrightarrow \frac{k_i E_{i0}}{\mu_1} \cos \theta_i - \frac{k_r E_{r0}}{\mu_1} \cos \theta_r = \frac{k_t E_{t0}}{\mu_2} \cos \theta_t, \quad (4.42)$$

である。ここで、式 (4.30) を使った。これら 2 つの式で $\mu_1 = \mu_2$ と近似すると、

$$E_{t0} = E_{i0} \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + n_{21} \cos \theta_t} = E_{i0} \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_i}}, \quad (4.43)$$

$$E_{r0} = E_{i0} \frac{\cos \theta_i - n_{21} \cos \theta_t}{\cos \theta_i + n_{21} \cos \theta_t} = E_{i0} \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_i}}, \quad (4.44)$$

が導かれる。境界面でのエネルギー透過率 T と反射率 R は、

$$T = \frac{\cos \theta_t \varepsilon_2 v_2}{\cos \theta_i \varepsilon_1 v_1} \left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}} \right)^2 = \frac{4 \cos \theta_i \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_i}}{(\cos \theta_i + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_i})^2}, \quad (4.45)$$

$$R = \frac{\cos \theta_r \varepsilon_1 v_1}{\cos \theta_i \varepsilon_1 v_1} \left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}} \right)^2 = \left(\frac{\cos \theta_i - \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_i}} \right)^2. \quad (4.46)$$

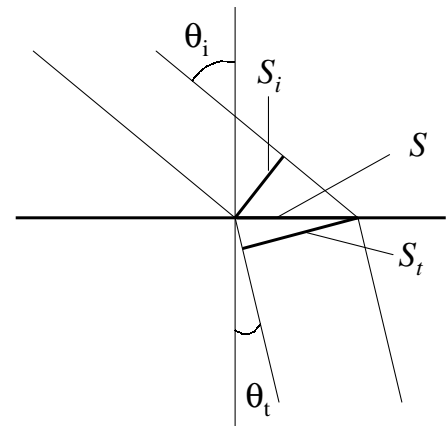


図 4.7 エネルギーの保存：境界面で変化する光束の断面積

である。ここで、入射光束が境界面を照らす面積を S とすると、入射光束と透過光束の波数ベクトルの向きを法線とする断面の面積は、それぞれ $S_i = S \cos \theta_i$, $S_t = S \cos \theta_t$ である。エネルギー透過率を求めるために断面積をかけてから比を取っているのは、ポインティングベクトルが単位時間あたり単位面積を貫くエネルギーの流れを表すからである。ここでは、 $|\mathbf{E}_{i0} \times \mathbf{H}_{i0}| = v \varepsilon E_{i0}^2$ を使った。境界面で電磁波の吸収を考えていないので、エネルギーは保存 ($T + R = 1$) されることに注目しよう。

問題 メガネのレンズは、レンズとは異なる屈折率の薄膜で表面処理されている。レンズ表面における反射を抑えるためには薄膜 (1 層) の屈折率をどの程度にしたらよいか、垂直入射 ($\theta_i = 0$) の場合について考えよ。

解答 式 (4.46) により、垂直入射の反射率は $R_{21} = \left(\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} \right)^2$ になる。レンズ表面をコートした薄膜の、空気側 R_{31} とレンズ側 R_{23} の反射率は 1 に比べて十分に小さいので、全体の反射率を $R = R_{23} + R_{31}$ のように近似できる。 $R = \left(\frac{n_{23} - 1}{n_{23} + 1} \right)^2 + \left(\frac{n_{31} - 1}{n_{31} + 1} \right)^2 \geq 2 \left(\frac{n_{23} - 1}{n_{23} + 1} \right) \left(\frac{n_{31} - 1}{n_{31} + 1} \right)$ 。反射率が最小になるのは等号が成立するときで、 $n_{23} = n_{31}$ つまり $n_{30} = \sqrt{n_{10} n_{20}}$ のときである。 $R_{\min} = 2 \left(\frac{\sqrt{n_{21}} - 1}{\sqrt{n_{21}} + 1} \right)^2$ 。これは、通常の屈折率 ($n_{21} \sim 2$) であれば R_{21} より小さい。さらに反射率を小さくするためには、薄膜の両面の反射光が干渉して打ち消すような厚さ (光路長が波長の $1/4$) にすればよい。

^{*15} 等方媒質の分極は、入射面に垂直な方向にだけ入射波によって誘起される。そのため、境界面から放射される電磁波 (反射波と透過波) の電場は、入射面に垂直な成分のみである。また、 \mathbf{H} の接線成分の連続性と $\text{div} \mathbf{D} = 0$ より、入射面内の電場成分が発生しないことがわかる。

4.2.4 入射面内で振動する電場 (p-wave)

右図のように入射光の電場が入射面内にあるとき、磁場は入射面に垂直であり、境界条件から反射・透過光の磁場も入射面に垂直である。

$$\mathbf{H}_{i0} = (0, H_{i0}, 0), \quad \mathbf{H}_{t0} = (0, H_{t0}, 0), \quad \mathbf{H}_{r0} = (0, H_{r0}, 0), \quad (4.47)$$

境界条件より、磁場 \mathbf{H} の境界面に平行な成分が連続なので、

$$H_{i0} + H_{r0} = H_{t0}, \quad (4.48)$$

である。恒等式^{*16}を使い、電場 \mathbf{E} を磁場の強さ \mathbf{H} で表すと、

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{H} &= \mathbf{k} \times \left(\frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega\mu} \right) = \frac{1}{\omega\mu} ((\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} - k^2\mathbf{E}) = -\frac{k^2}{\omega\mu} \mathbf{E} \\ \rightarrow \mathbf{E} &= -\frac{v\mu}{k} \mathbf{k} \times \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

になるので、入射波の電場は次のように表される。

$$\mathbf{E}_{i0} = -\frac{v_1\mu_1}{k_i} k_i (\sin\theta_i, 0, -\cos\theta_i) \times (0, H_{i0}, 0) = -v_1\mu_1 H_{i0} (\cos\theta_i, 0, \sin\theta_i), \quad (4.50)$$

同様にして透過波・反射波の電場を求めると、電場の接線成分が連続という境界条件は、

$$-v_1\mu_1 H_{i0} \cos\theta_i + v_1\mu_1 H_{r0} \cos\theta_r = -v_2\mu_2 H_{t0} \cos\theta_t, \quad (4.51)$$

になる。 $\mu_1 = \mu_2$ と近似し、これら電場・磁場の境界条件から、

$$H_{t0} = H_{i0} \frac{2 \cos\theta_i}{\cos\theta_i + n_{21} \cos\theta_t} = H_{i0} \frac{2n_{21}^2 \cos\theta_i}{n_{21}^2 \cos\theta_i + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta_i}}, \quad (4.52)$$

$$H_{r0} = H_{i0} \frac{\cos\theta_i - n_{21} \cos\theta_t}{\cos\theta_i + n_{21} \cos\theta_t} = H_{i0} \frac{n_{21}^2 \cos\theta_i - \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta_i}}{n_{21}^2 \cos\theta_i + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta_i}}, \quad (4.53)$$

が導かれる。光線束の断面積を考慮して境界面での透過率 T と反射率 R を求めると、

$$T = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \frac{\mu_2 v_2}{\mu_1 v_1} \left(\frac{H_{t0}}{H_{i0}} \right)^2 = \frac{4 \cos\theta_i n_{21}^2 \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta_i}}{(n_{21}^2 \cos\theta_i + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta_i})^2}, \quad (4.54)$$

$$R = \frac{\cos\theta_r}{\cos\theta_i} \frac{\mu_1 v_1}{\mu_1 v_1} \left(\frac{H_{r0}}{H_{i0}} \right)^2 = \left(\frac{n_{21}^2 \cos\theta_i - \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta_i}}{n_{21}^2 \cos\theta_i + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta_i}} \right)^2, \quad (4.55)$$

になる。境界面で吸収がないので $T + R = 1$ であり、電磁波のエネルギーが保存される。

補足 ポインティングベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は、単位時間あたり単位面積を貫くエネルギーである。上の例では、式 (4.47) と式 (4.50) より、 $\mathbf{E}_{i0} \times \mathbf{H}_{i0} = \mu_1 v_1 H_{i0}^2 (\sin\theta_i, 0, -\cos\theta_i)$ なので、単位面積の境界面 $\mathbf{S} = (0, 0, -1)$ を単位時間あたりに貫くエネルギーは、 $(\mathbf{E}_{i0} \times \mathbf{H}_{i0}) \cdot \mathbf{S} = \mu_1 v_1 H_{i0}^2 \cos\theta_i$ になる。

— 境界で反射光や透過光がなくなる!?! —

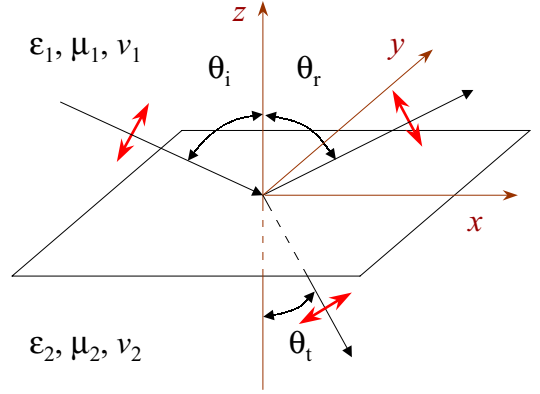


図 4.8 p 偏光の反射と屈折

*16 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$.

4.2.5 ブリュースタ角

ここでは、反射波の強度に注目する。電場が入射面に垂直な場合、式 (4.44) の分子がゼロになるのは、2 つの媒質が同じ光学的性質 ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \mu_1 = \mu_2$) の時のみである。これに対し、電場が入射面内のとき、

$$\tan \theta_i = n_{21}, \quad (4.56)$$

をみたく角度で入射すると、式 (4.53) の分子、つまり、反射波の強度がゼロになる。^{*17} このように反射率がゼロになる角を、ブリュースタ角と呼ぶ。この現象を利用すると、ランダムな偏光から直線偏光を作ることができる。つまり、ランダム偏光の電磁波をブリュースタ角で境界面に入射させると、電場が入射面内の電磁波の反射率がゼロになるので、電場が入射面に垂直に偏った電磁波のみが反射される。^{*18}

補足 「反射率の入射角依存性」と「電場の接線成分が連続という境界条件」の関係を定性的に考えてみよう。

光学的に疎な媒質から密な媒質に電磁波が入射する場合、つまり $1 < n_{21}$ のとき、電場が入射面に垂直な電磁波では、式 (4.44) より、常に $E_{r0} < 0 < E_{i0}$ である。これを、エネルギー保存則から眺めてみる。式 (4.45) で表されるエネルギー透過率は $T \leq 1$ で、かつ $\cos \theta_i \leq \cos \theta_t$ なので、常に $0 < E_{t0} < E_{i0}$ である。電場は境界面に対し接線成分しか持たないので、 $E_{t0} < E_{i0}$ をみたくするために、常に反射光 ($E_{r0} < 0$) が必要である。

電場が入射面内の場合、接線成分 $E_{i0} \cos \theta_i$ の大きさは入射角に依存するので、エネルギー保存則をみたくしながら、 $|E_{i0} \cos \theta_i| < |E_{t0} \cos \theta_t|$ となることもある。入射角が $0 < \theta_i < \tan^{-1} n_{21}$ では、式 (4.51) より、 $E_{i0} \cos \theta_i < E_{t0} \cos \theta_t < 0 < E_{r0} \cos \theta_r$ である。それに対し、入射角が $\tan^{-1} n_{21} < \theta_i$ では、 $E_{t0} \cos \theta_t < E_{i0} \cos \theta_i < E_{r0} \cos \theta_r < 0$ である。

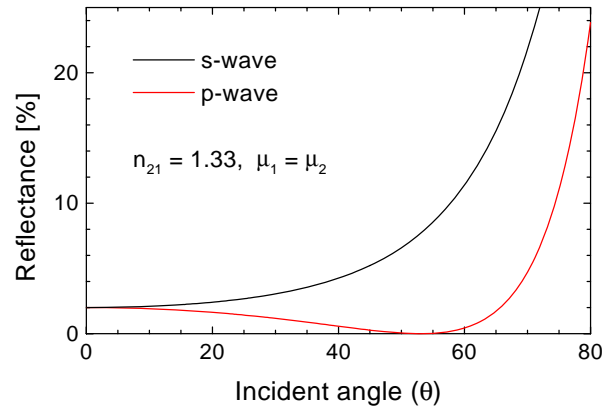


図 4.9 反射率の角度依存性

^{*17} スネルの法則 (4.38) を使って式 (4.53) を変形すると、 $H_{r0} = H_{i0} \tan(\theta_i - \theta_t) / \tan(\theta_i + \theta_t)$ になる。式 (4.56) は、 $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ とスネルの法則からも導かれる。

^{*18} 直線偏光板をまわして、机などの反射が偏光していることを観察しよう。このように直線偏光板は、水面などの表面の反射によるチラツキを抑えたり、カメラの偏光フィルターに使われたりします。

第5章

電磁波の放射

— 振動電荷の運動エネルギーの行方 —

これまで、自由空間を伝播する電磁波を扱ってきた。それらは、真電荷・伝導電流がない場合のマクスウェルの方程式の解である。自由空間では電磁波は伝播するが、発生はしない。講義の最後に、真空中の電荷の運動による電磁波の放射について調べる。

5.1 球座標

時間変化する局所的な電荷分布から放射される電磁波を遠方で観測する場合は、電荷分布の重心を原点とする球座標で考えるとよい。電荷分布の詳細な構造を無視して伝播する電磁波だけを扱うという姿勢である。さらに遠方で観測する場合は、球面波の曲率半径が大きいので平面波と近似することができる。第4章では、平面波を (x, y, z) 成分で表すデカルト座標で表示したが、球面波は球座標で扱うのが自然である。

球座標は直交曲線座標の一つであり、図5.1に示すように、各点において座標軸の向きの定義された座標系である。基底ベクトル e_r, e_θ, e_ϕ は、この順に右手系になっている。^{*1} ここでは、球座標で問題を解くために必要な内容をまとめる。^{*2} まず、位置ベクトル $x = (x, y, z)$ を球座標で表すと、

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (5.1)$$

である。図5.1を参考に、点 $x = (x, y, z)$ における r, θ, φ 方向の単位ベクトル e_r, e_θ, e_ϕ を、それぞれ x, y, z 方向の単位ベクトル e_x, e_y, e_z で表すと、

$$\begin{aligned} e_r &= dr = \sin \theta \cos \varphi e_x + \sin \theta \sin \varphi e_y + \cos \theta e_z, \\ e_\theta &= r d\theta = \cos \theta \cos \varphi e_x + \cos \theta \sin \varphi e_y - \sin \theta e_z, \\ e_\phi &= r \sin \theta d\varphi = -\sin \varphi e_x + \cos \varphi e_y, \end{aligned} \quad (5.2)$$

である。ベクトル A を両座標系で $A_r e_r + A_\theta e_\theta + A_\phi e_\phi = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z$ と表わし、成分の変換式を求める。両辺、 e_r, e_θ, e_ϕ と内積をとると、次のようになる。

$$\begin{aligned} A_r &= A \cdot e_r = A_x \sin \theta \cos \varphi + A_y \sin \theta \sin \varphi + A_z \cos \theta, \\ A_\theta &= A \cdot e_\theta = A_x \cos \theta \cos \varphi + A_y \cos \theta \sin \varphi - A_z \sin \theta, \\ A_\phi &= A \cdot e_\phi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.3)$$

問題 e_x, e_y, e_z が右手系であることを利用し、 e_r, e_θ, e_ϕ が右手系であることを ($e_r \times e_\theta = e_\phi$ など) を確かめよ。

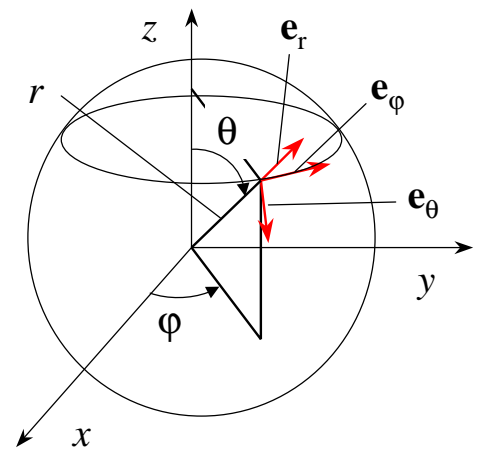


図5.1 球座標と基底ベクトル

^{*1} デカルト座標では、 e_x, e_y, e_z が右手系の基底ベクトルである。

^{*2} ベクトルとスカラー、ベクトル積とスカラー積(内積)、微分演算子 grad, div, rot, Δ を理解していない人は、この機会に復習するとよい。

問題 e_r, e_θ, e_φ が直交していること、規格化されていることを確かめよ。

補足 以下、座標系の計量 (縮尺) を考慮し、球座標表示の微分演算子を列挙する。ベクトル場 $A(r, \theta, \varphi)$ の発散と回転は次のようになる。

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi), \quad (5.4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial (\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right\} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right\} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\} \mathbf{e}_\varphi. \quad (5.5)$$

関数 $F(r, \theta, \varphi)$ の勾配とラプラシアンは次のようになる。

$$\operatorname{grad} F = \frac{\partial F}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \Delta F = \operatorname{div} \cdot \operatorname{grad} F &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial F}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rF) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

問題 式 (5.4) と式 (5.6) から、式 (5.7) を導け。

5.2 遅延ポテンシャル

ローレンツゲージの電磁ポテンシャルの式 (3.32) を直接解くのは難しい。一方、時間変化しない場合のスカラーポテンシャル ϕ は、既に知っている。^{*3} つまり、

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV', \quad (5.8)$$

は、位置 \mathbf{x}' の体積要素 dV' 内の電荷から $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ だけ離れた観測点 \mathbf{x} におけるスカラーポテンシャルの、電荷分布全体で和を取ったものである。^{*4} スカラーポテンシャルのみたすべき方程式は、ポアソンの方程式、

$$\Delta \phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{x}), \quad (5.9)$$

である。^{*5} 電荷分布が時間変化する場合でも、空間分布の細かな構造が無視できるくらいに十分離れた場所のポテンシャルは、式 (5.8) と同様であろう。しかし、波動方程式 (3.32) で表される電磁波は、波源から観測点 \mathbf{x} まで有限の速さ c で伝わるので、時刻 t に観測点 \mathbf{x} に到達する電磁波は、波源 \mathbf{x}' において $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ に発生した電磁波である。以上の考察から、

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV', \quad (5.10)$$

が波動方程式 (3.32) の解であると推測する。ベクトルポテンシャルの各成分はスカラーポテンシャルと同形の方程式をみたすので、同様に、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV', \quad (5.11)$$

が推測される。観測点 \mathbf{x} における電磁ポテンシャルは、波源 \mathbf{x}' から放射された時刻より $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ だけ遅れているので、遅延ポテンシャルと呼ぶ。^{*6} これらを式 (3.31) に代入すれば、時間変化する電荷・電流から放射される電磁場を求めることができる。

^{*3} クーロンの法則、 $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$ を思い出そう。本文中の ρ は、電荷密度である。

^{*4} 位置 \mathbf{x} にいる観測者は、 \mathbf{x} の電磁場を知ることができるのみであって、 \mathbf{x}' の電荷分布のようすなどを直接測定できない。位置 \mathbf{x}' における電荷のまわりに場が形成される。したがって、観測点 \mathbf{x} における電磁ポテンシャルから、 \mathbf{x}' における電荷のようすを推測する。

^{*5} 式 (3.32) の時間変化を表す項を削除すると、ポアソンの方程式になる。

^{*6} ローレンツゲージの方程式から求めた電磁ポテンシャルが、ローレンツ条件をみたすことを確認できる。文献 [2] p292。

5.3 電気双極子放射

5.3.1 電気双極子のモデル

遅延ポテンシャルを使って、時間変化する電荷分布から発生する電磁波を求める。ただし、抽象的な式では物理的イメージを描くのが難しくなるので、電気双極子を模したモデルで計算する。^{*7}

図5.2のように、太さが無視できる長さ ℓ の導線で結ばれた2つの導体球 (大きさは無視できる) を、 z 軸上で原点について対称に置く。 ℓ は原子の大きさ程度としておこう。時間変化する電荷分布と電流の間には、

$$\frac{dq}{dt} = I, \quad (5.12)$$

の関係がある。電流の符号は、上向きに流れるときを正とした。何らかの方法^{*8}で電流を、

$$I(t) = I_0 \cos \omega t, \quad (5.13)$$

のように制御したとき発生する電磁場を求める。

まず定性的に考えてみよう。電荷が z 軸上を振動しているので、 z 軸周りの同心円状に磁場が発生するであろう。その磁場と直交するように電場が発生し、電磁波として伝播する。電場は、その振動方向が電気双極子の振動方向と平行であり、直線偏波である。観測点が xy 平面上にあるとき、双極子の振動が大きく見えるので電磁波も強いであろう。 z 軸上で観測すると振動が見えないので、電磁波も観測できないに違いない。放射される電磁波の強度に角度依存性があるのは、電磁波が横波であることからも理解できる。電場は双極子の振動方向と平行に振動するので、 z 軸方向に伝播する電磁波は存在しない。

5.3.2 電磁ポテンシャル

前節で物理的イメージをつかんだので、ここでは、放射される電磁波を定量的に調べる。まず、振動電流から電磁ポテンシャルを求める。細い導線を通る電流の密度は、

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}', t') = I(t') \delta(x') \delta(y') \mathbf{e}_z, \quad (-\ell/2 \leq z' \leq \ell/2), \quad (5.14)$$

なので、^{*9} これを式 (5.11) に代入する。

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{I(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dz', \quad \mathbf{x}' = z' \mathbf{e}_z, \quad (5.15)$$

観測点は座標原点から十分に離れていて、 $\ell \ll |\mathbf{x}|$ が成立しているとし、次のように近似する。

$$|\mathbf{x} - z' \mathbf{e}_z| = (r^2 - 2rz' \cos \theta + z'^2)^{1/2} \cong r - z' \cos \theta, \quad (5.16)$$

ここでは、2次の微小量 $(z'/r)^2$ を無視し、観測点の位置ベクトルを極座標 (5.1) で表した。

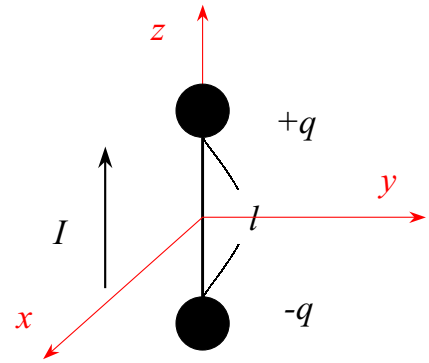


図 5.2 電磁波を放射する電気双極子のモデル。ある時刻における電流は、導線内で同じ大きさとする。

^{*7} 電磁波の放射のより一般的な扱いは、文献 [2], [4] を参照せよ。本項では電気双極子放射の概観を理解するのが目的なので、大胆に近似して単純な結果を得るように心がける。

^{*8} 本項は、X線などの電磁波の電子による散乱問題にも関連する。つまり電磁波の電場によって振動する電子は、電磁波を電気双極子放射する。

^{*9} デルタ関数 $\delta(x)$ は、 $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\delta(x)dx = F(0)$ で定義される。本文の式では、電流が $(x, y) = (0, 0)$ に局在していることを表わす。

式 (5.15) の被積分関数のうち、分母は式 (5.16) を使って 1 次の微小量も無視して $|\mathbf{x} - z'\mathbf{e}_z| \sim r$ と近似する。一方、分子の振動電流では、その時間変化が非常に速いと x' を無視できない。そこで、 $\ell \ll \lambda$ (発生する電磁波の波長) のときを考える。このとき、

$$|z' \cos \theta|/c < \ell/c \ll 2\pi/\omega, \quad (5.17)$$

が成り立つので、電流が式 (5.13) で表されることを考慮すると、式 (5.15) の被積分関数は観測点の座標だけで表され、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{I(t-r/c)}{r} dz' = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 \ell}{4\pi r} I(t-r/c), \quad (5.18)$$

と近似できる。原子から放射される可視光の場合、 $\ell \sim 0.1$ nm (原子の大きさ程度)、 $\lambda \sim 100$ nm なので条件 ($\ell \ll \lambda$) はみたされている。スカラーポテンシャルを、ベクトルポテンシャルと同様に電荷分布から求めてもよいが、ここではローレンツ条件から求めよう。^{*10} ローレンツ条件 (3.33) から

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c^2 \operatorname{div} \mathbf{A} = c^2 \frac{\mu_0 \ell}{4\pi} \left\{ \frac{z}{r^3} I(t-r/c) + \frac{z}{r^2 c} I'(t-r/c) \right\}, \quad (5.19)$$

なので、^{*11} 式 (5.12) を使うと、

$$\phi = \frac{\mu_0 \ell c}{4\pi r^2} z \left\{ \frac{c}{r} q(t-r/c) + I(t-r/c) \right\}, \quad (5.20)$$

である。静電場には興味がないので、時間依存しない積分定数は無視した。ところで、式 (5.12) と式 (5.13) から $q = q_0 \sin \omega t$, $q_0 = I_0/\omega$ なので、

$$\lambda \ll r, \quad (5.21)$$

のような遠方で観測した場合は、式 (5.20) の第 1 項は第 2 項に比べ無視できる。以上より、スカラーポテンシャルは、

$$\phi = \frac{\mu_0 \ell c}{4\pi r^2} z I(t-r/c), \quad (5.22)$$

と表すことができる。

5.3.3 放射される電磁場

前節の電磁ポテンシャル (5.18) と (5.22) より電磁場 \mathbf{B} , \mathbf{E} を求め、極座標の成分で表示する。

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{e}_y \\ &= \frac{\mu_0 \ell}{4\pi r^2} I_0 \left\{ \frac{1}{r} \cos \omega(t-r/c) - \frac{\omega}{c} \sin \omega(t-r/c) \right\} (-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y) \\ &= \frac{\mu_0 \ell}{4\pi r} I_0 \sin \theta \left\{ \frac{1}{r} \cos \omega(t-r/c) - \frac{\omega}{c} \sin \omega(t-r/c) \right\} \mathbf{e}_\varphi, \quad (5.23) \\ \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{e}_y - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 \ell c}{4\pi r} I_0 \left\{ \frac{\omega}{c} \sin \omega(t-r/c) - \frac{1}{r} \cos \omega(t-r/c) \right\} \mathbf{e}_z \\ &\quad - \frac{\mu_0 \ell c}{4\pi r} I_0 \left\{ \frac{\omega}{c} \sin \omega(t-r/c) - \frac{2}{r} \cos \omega(t-r/c) \right\} \frac{z}{r^2} (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) \\ &= \frac{\mu_0 \ell c}{4\pi r^2} I_0 \cos \theta \cos \omega(t-r/c) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \frac{\mu_0 \ell c}{4\pi r} I_0 \sin \theta \left\{ \frac{1}{r} \cos \omega(t-r/c) - \frac{\omega}{c} \sin \omega(t-r/c) \right\} \mathbf{e}_\theta. \quad (5.24) \end{aligned}$$

^{*10} 電流と電荷は電荷保存則で関連づけられているので、グリーン関数 (5.10) から求めても、 $\phi = \frac{\pm q(t-(r \mp \ell \cos \theta/2)/c)}{4\pi \epsilon_0 (r \pm \ell \cos \theta/2)}$ のように、ローレンツ条件から求めた式 (5.20) と一致する。

^{*11} $\partial r/\partial z = z/r$, $\partial(1/r)/\partial z = -z/r^3$ ($r \neq 0$)

条件 (5.21) を使って、これらを簡単にすると、

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 \ell \omega}{4\pi r c} I_0 \sin \theta \sin \omega(t - r/c) \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{E} = -\frac{\mu_0 \ell \omega}{4\pi r} I_0 \sin \theta \sin \omega(t - r/c) \mathbf{e}_\theta, \quad (5.25)$$

である。球面 (r 一定) では正弦波の位相が一定になる、つまり、波面は球面である。実際には、球面波になる領域の電磁波を調べてきた。^{*12} ここでも、電磁波の電場と磁場の振幅の関係が $E_\theta = cB_\varphi$ になるのを確認できる。電場ベクトルが \mathbf{e}_θ 方向に偏っているので、電磁波は直線偏波である。特に $\theta = \pi/2$ のとき波源の電流の方向と平行 ($\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_z$) である。ポインティングベクトルは、

$$\mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{c} \left\{ \frac{\ell \omega}{4\pi r} I_0 \sin \theta \sin \omega(t - r/c) \right\}^2 \mathbf{e}_r, \quad (5.26)$$

なので、電磁波のエネルギーは球面の外側に向かって流れている。ポインティングベクトルの時間平均を取って、

$$\langle \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \rangle = \frac{\mu_0}{2c} \left\{ \frac{\ell \omega}{4\pi r} I_0 \sin \theta \right\}^2 \mathbf{e}_r, \quad (5.27)$$

半径 r の球面を単位時間あたりに通過するエネルギーを計算すると、

$$\int \langle \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \rangle \cdot d\mathbf{S} = \int_0^\pi \frac{\mu_0}{\pi c} \left(\frac{\ell \omega}{4} I_0 \right)^2 \sin^3 \theta d\theta = \frac{\ell^2 \omega^2 I_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3}, \quad (5.28)$$

になる。^{*13} つまり r が大きくなってもエネルギー一定の流れが生じている。これは、電荷の運動によって放射された電磁波が有限の量のエネルギーを持ち去っていることを表している。また、式 (5.26) でもわかるように、電磁波の放射強度には角度依存性があり、電流に垂直な方向 ($\theta = \pi/2$) に放射されるエネルギーが大きく、 $\theta = 0$ 方向には電磁波は放射されない。(図5.3参照)

補足 式 (5.3) を参考に球座標表示すると、電磁ポテンシャル (5.18), (5.22) は次のようになる。

$$A_r = \frac{\mu_0 \ell}{4\pi r} I_0 \cos \theta \cos \omega(t - r/c), \quad A_\theta = -\frac{\mu_0 \ell}{4\pi r} I_0 \sin \theta \cos \omega(t - r/c), \quad A_\varphi = 0, \quad (5.29)$$

$$\phi = \frac{\mu_0 \ell c}{4\pi r} I_0 \cos \theta \cos \omega(t - r/c). \quad (5.30)$$

考えている系の対称性を反映し、どの成分も φ に依存しない。これらより球座標で電磁場を求めると、

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\} \mathbf{e}_\varphi, \\ &= -\frac{\mu_0 \ell}{4\pi r} I_0 \sin \theta \left\{ \frac{\omega}{c} \sin \omega(t - r/c) - \frac{1}{r} \cos \omega(t - r/c) \right\} \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \phi &= \frac{\mu_0 \ell c}{4\pi r^2} I_0 \cos \theta \cos \omega(t - r/c) \mathbf{e}_r \\ &+ \frac{\mu_0 \ell c}{4\pi r} I_0 \sin \theta \left\{ \frac{1}{r} \cos \omega(t - r/c) - \frac{\omega}{c} \sin \omega(t - r/c) \right\} \mathbf{e}_\theta, \end{aligned} \quad (5.32)$$

これを整理すると式 (5.25) に一致する。このように、対称性に適した座標系を選ぶと見通しよく計算できる。

補足 電磁波の放射が電荷の加速度運動によることに注目しよう。式 (5.25) にあるように、電磁波と電荷位置の位相は一致する。^{*14} また、電荷 q_0 の荷電粒子が振幅 $\ell/2$, 角周波数 ω で単振動する場合、単位時間あたりに放出する

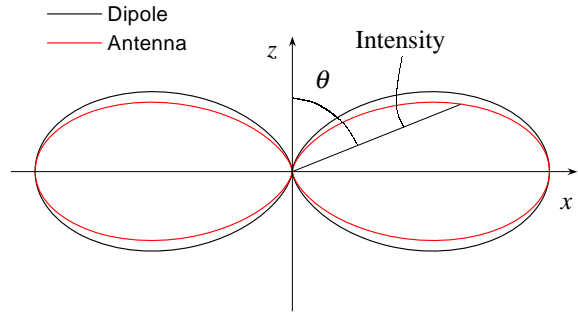


図 5.3 放射された電磁波強度の角度依存性

^{*12} 近年、「近接場」が注目されている。これまで十分遠方にて観測していたものは、双極子から外に向かって流れるエネルギーであった。しかし、電気双極子の近傍では、本文で無視してきたエネルギーの流れのない電磁場が存在する。

^{*13} $d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_r$, $\langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2$, $4 \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - \sin 3\theta$

^{*14} 電気双極子放射の近似で議論を進めた。一般に、条件 $\ell \ll \lambda \ll r$ が満たされない場合、放射される電磁波と電荷位置の位相は一致しない。

電磁波のエネルギーは、式 (5.28) より、

$$\frac{\ell^2 \omega^2 I_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{q_0^2 \ell^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}, \quad (5.33)$$

になる。これは、電荷の運動が激しく(周波数が大きく)なると放射されるエネルギーが ω^4 に比例して急激に増加することを示している。^{*15}

5.3.4 アンテナ ●

— 携帯電話のアンテナはラジオより短い! —

直線状のアンテナから発生する電磁波を扱う。前項では、発生する電磁波の波長より電流の流れる導線が十分に短い条件 (5.17) を使っていた。しかし、ラジオなどの電磁波をアンテナから放射する場合、この条件は必ずしも満たされない。そこで図5.4のようなアンテナを考え、発生する電磁波を、アンテナの微小部分 dz ($\ll \lambda$) から発生する多数の電磁波の重ね合わせとして求める。アンテナの端点では電流が流れないので、導線に流れる振動電流が、

$$I(z, t) = I_0 \cos \omega t \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right), \quad (5.34)$$

のようになっている。ここで、 λ はアンテナ内の振動電流の波長である。実際にはアンテナ(金属)内の波長と真空中の電磁波の波長は異なる。しかし以下では、 $\lambda\omega/2\pi = c$ として計算する。さて、長さ $\ell = dz$ の微小領域では電流の大きさが一定であるとみなせるので、式 (5.25) により微小領域から発生する電磁波は、観測点 P において、

$$dB_\varphi = -\frac{\mu_0 \omega I_0 \sin \theta'}{4\pi c} \frac{\sin \omega(t - R/c) \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) dz}{R}, \quad dE_\theta = c dB_\varphi, \quad (5.35)$$

と表わせる。これらの式で z 依存する項を明示し、式 (5.21) を使って以下のように近似する。

$$R = \sqrt{r^2 - 2rz \cos \theta + z^2} \cong r - z \cos \theta, \quad (5.36)$$

$$\frac{\sin \theta'}{R} = \frac{r \sin \theta}{R^2} \cong \frac{\sin \theta}{r} \left(1 + \frac{2z}{r} \cos \theta\right) \cong \frac{\sin \theta}{r}. \quad (5.37)$$

アンテナ全体で積分すると、観測点における電磁場は、

$$B_\varphi = -\frac{\mu_0 I_0 \sin \theta}{4\pi r} K, \quad E_\theta = c B_\varphi, \quad (5.38)$$

$$K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\left\{\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + u \cos \theta\right\} \cos u \, du, \quad u = \frac{2\pi}{\lambda} z, \quad (5.39)$$

である。 u について奇関数は積分がゼロになるので、

$$K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \cos(u \cos \theta) \cos u \, du = 2 \sin \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta}, \quad (5.40)$$

である。^{*16} これを式 (5.38) に代入すると、

$$B_\varphi = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \sin \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}, \quad E_\theta = c B_\varphi, \quad (5.41)$$

^{*15} 式 (5.33) のように変形すると、電気双極子 $q_0 \ell$ でまとめることができる。

^{*16} $2 \cos(u \cos \theta) \cos u = \cos(u \cos \theta + u) + \cos(u \cos \theta - u)$ 。 $\cos \theta = \pm 1$ の場合も $\theta \rightarrow 0$ または $\theta \rightarrow \pi$ の極限を取れば、正しい値 $K = \frac{\pi}{2} \sin \omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$ に一致する。

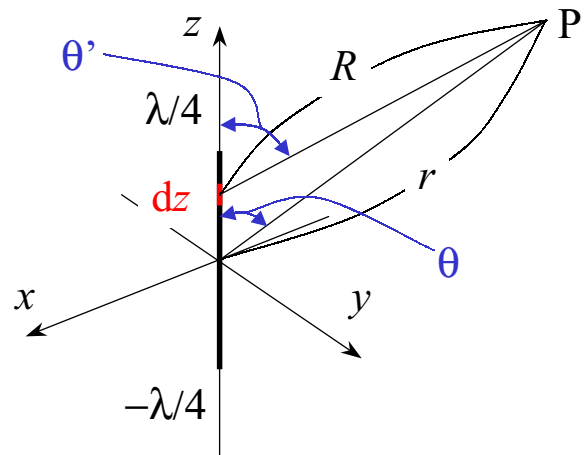


図 5.4 双極子アンテナによる放射

になる。図5.3は、時間変化する電流から放射される電磁波強度の角度依存性である。角度 θ における強度を、原点からの距離として描いている。電流分布が軸対称なので、電磁波も z 軸周りに対称に分布している。黒線は電流分布の大きさ l が電磁波の波長 λ よりも十分に短いとき (式 (5.26))、赤線がアンテナのように電流分布と波長が同程度の大きさのとき (式 (5.41)) の強度分布である。アンテナの方が多少指向性がよくなっている。ところで実際のアンテナに振動電流を流すためには発振機をつなぐ必要がある。上の例に対応させると、定在波の腹の位置 — つまり原点 — に発振器をつなげ、領域 $z > 0$ の導線に電流を流すことである。その際アンテナの長さを電磁波の波長の約 $1/4$ にすると、効率よく電磁波を放射することができる。電磁波を受信するときでも同様である。例えば FM ラジオで 80 MHz を受信するためには、長さが $\lambda/4 \sim 0.94$ m 程度のアンテナがよく、携帯電話の 800 MHz 程度の電波では 9.4 cm 程度の長さが適している。^{*17}

問題 携帯電話の基地局から発せられる電磁波の電場強度が地上 1.5 m の高さで 1 [V/m] であったとき、単位面積を単位時間あたり通過する電磁波のエネルギーを求めよ。

問題 携帯電話のハンドセットの送信出力が 1 [W] のとき、波長より十分離れた位置における電場強度を求めよ。
(アンテナの長さが波長の $1/2$ か $1/4$ かで計算結果が異なるが、およその値を求めるのが目的なので、どちらで計算してもよい。)

表 5.1 携帯電話の送信出力 (2002 年現在)

	単位	PHS	cdmaOne
送信周波数	MHz	1500	800
バースト出力	mW	80	200
平均出力	mW	10	200

^{*17} 前ページでも断ったが、実際には、アンテナ中の電磁波の波長と真空中の波長は異なる。そのため、アンテナの長さは速さの比だけ補正する必要がある。また半波長ダイポールアンテナでは、その長さは、 $1/4$ 波長ダイポールアンテナの場合の 2 倍になる。

参考文献

- [1] 長岡洋介、物理入門コース“電磁気学 I, II”、岩波書店、東京 (1982).
- [2] 砂川重信、“電磁気学”、岩波書店、東京 (1977).
- [3] 和田純夫、“電磁気学のききどころ”、岩波書店、東京 (1994).
- [4] 川村 清、“電磁気学”、岩波書店、東京 (1994).
- [5] パノフスキー、フィリップス、“電磁気学”、吉岡書店、京都 (1981).
- [6] 鶴田匡夫、“光の鉛筆”、新技術コミュニケーション、東京 (1998). 光に関わる現象を一般向けに紹介した本
- [7] 北野正雄、“マクスウェル方程式”(SGC ライブラリ 39)、サイエンス社、東京 (2005).

索引

アンテナ, 33
アンペール・マクスウェルの法則, 13
アンペールの法則, 12

位相, 21

エネルギー保存則, 14
円偏波, 22

回転 (rot), 6, 7
ガウスの定理, 15
ガウスの法則, 5, 6, 12–14, 16
角周波数, 8
ガリレイ変換, 9

球座標, 28
球面波, 21, 28, 32
境界条件, 23

屈折率, 24
グリーン関数, 31

ゲージ変換, 17

勾配 (grad), 29
コンデンサー, 13

磁束, 5
磁束密度, 5
周期, 21
自由空間, 19, 28

ストークスの定理, 7
Snell の法則, 24

遅延ポテンシャル, 29
直線偏波, 22

電荷保存則, 12, 14, 31
電気双極子, 30
電気双極子放射, 30
電磁ポテンシャル, 16, 29
電磁誘導, 5–7, 9, 13, 14

透過率, 25, 26

入射面, 23, 25, 26

波数, 21
波長, 21
発散, 5
波動方程式, 19, 20, 23, 29
反射率, 25, 26

ブリュースタ角, 27

平面波, 21, 28
変位電流, 13

ポアソンの方程式, 29
ポインティングベクトル, 15, 20, 22, 25, 32

マクスウェルの方程式, 14, 16, 19, 28

ラプラシアン, 29

ローレンツ力, 9
ローレンツゲージ, 17, 19, 29
ローレンツ条件, 17, 29, 31