

電磁気学 II 演習 テスト 8

学籍番号

氏名

1. 以下の に当てはまる式を記入せよ。(同じ番号の欄には同じ式が入るので、一つの欄にだけ記入すれば良い。)

半径 R の無限に長い円筒の内部に一様な密度 ρ で分布した電荷による電位を、ポアソンの方程式を解くことにより求めてみよう。ただし境界条件として、円筒の側面上の点における電位 $\phi(r)$ を 0 とする。

円筒の中心軸を z 軸とする。電荷の分布が軸対称だから、それによって生じる電位も軸対称となり、中心軸からの距離 r だけの関数 $\phi(r)$ として与えられる。このとき、

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d\phi(r)}{dr} \right\} \quad (1)$$

が成り立つ。よって、ポアソンの方程式は

$$r > R \text{ のとき} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d\phi(r)}{dr} \right\} = \text{①} \quad (2)$$

$$r \leq R \text{ のとき} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d\phi(r)}{dr} \right\} = \text{②} \quad (3)$$

$r > R$ のとき、(2) 式を積分して変形すると、 C_1 を積分定数として、次式を得る。

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{C_1}{\text{③}} \quad (4)$$

$r \leq R$ のときは、(3) 式の両辺に r を掛けてから積分すると、 C_2 を積分定数として、

$$\int \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d\phi(r)}{dr} \right\} dr = r \frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} r^2 + C_2$$

r を移項して

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = -\text{④} + \frac{C_2}{r} \quad (5)$$

裏に続く

$r = 0$ (中心軸上) で、電場すなわち電位の微分係数 $d\phi(r)/dr$ は 0 でなければならぬので、(5) 式に $r = 0$ を代入すると

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{\rho \times 0}{2\varepsilon_0} + \frac{C_2}{0} = 0$$

$$\therefore C_2 = 0$$

$$\therefore \frac{d\phi(r)}{dr} = -\boxed{\text{④}} \quad (6)$$

また、 $r = R$ (円筒の側面上) で、 $d\phi(r)/dr$ が連続である必要から、(4)、(6) 式から

$$\frac{C_1}{R} = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} R$$

となり、

$$C_1 = -\rho R^2/2\varepsilon_0$$

$$\therefore \frac{d\phi(r)}{dr} = \boxed{\text{⑤}} \quad (7)$$

したがって、(6)、(7) 式を積分すると、

$$r \leq R \text{ のとき} \quad \phi(r) = \int \left(-\boxed{\text{④}} \right) dr = \boxed{\text{⑥}} + C_3 \quad (8)$$

$$r > R \text{ のとき} \quad \phi(r) = \int \left(\boxed{\text{⑤}} \right) dr = \boxed{\text{⑦}} + C_4 \quad (9)$$

(8) 式の結果に $\phi(R) = 0$ という条件を入れると、

$$-\boxed{\text{⑧}} + C_3 = 0 \quad \therefore C_3 = \boxed{\text{⑧}}$$

$$\therefore \phi(r) = \boxed{\text{⑨}}$$

また、(9) 式の結果に $\phi(R) = 0$ という条件を入れると、

$$-\boxed{\text{⑩}} + C_4 = 0 \quad \therefore C_4 = \boxed{\text{⑩}}$$

$$\therefore \phi(r) = \boxed{\text{⑪}}$$

を得る。