

電磁気学II演習 テスト10

学籍番号

氏名

1. 広い平らな導体の表面から距離 a の位置に点電荷 q が置かれている。この点電荷を導体表面からの距離が a の位置から無限遠まで引き離すために要する仕事を求めよ。

広い平らな導体と点電荷が作る電場は、鏡映的な位置に有る点電荷 $-q$ を仮定することで解くことができる。点電荷 q が導体の表面から x の距離にあるとき、点電荷 q にはたらく力 $F(x)$ は、 $2x$ 離れた2つの点電荷、 q 、 $-q$ 間の引力と考えることができ、

$$F(x) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2x)^2}$$

したがって、距離 a の位置から無限遠まで動かすための仕事 W は、 a から無限遠までの積分で表され

$$\begin{aligned} W &= \int_a^\infty F(x)dx = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \left(\frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{x}\right]_a^\infty = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{a}\right) \\ &= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a} \end{aligned}$$

裏面に続く

2. 無限に広い平らな導体面に平行な直線（導体面からの距離 a ）上に、電荷が線密度 λ で一様に分布している。導体面上の電場の強さ、および電荷密度を求めよ。

線密度 λ で帯電した無限に長い線が r だけ離れた点に作る電場 $E(r)$ は円筒対称であるので、ガウスの法則により

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

で与えられる。

直線上に分布する電荷は点電荷の列と見ることができる。各点電荷による電場は鏡映法によって求めることが出来るから、重ね合わせの原理により、直線上に分布する電荷による電場も、電荷とその鏡像による電場として表される。

下図のように直線に垂直な平面内を見た時、直線の垂線の足から x だけ離れた点 P における直線上の電荷による電場 $E(x)$ は、 r を $\sqrt{a^2 + x^2}$ で置き換えて

$$E(x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + x^2}}$$

となる。

点 P における直線上の電荷およびその鏡像による電場は、図に示すように導体面に平行な成分は打ち消し合い、垂直な成分だけの和となるから

$$E(x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + x^2}} \frac{2a}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\lambda a}{\pi\epsilon_0(a^2 + x^2)}$$

電荷密度 $\sigma(x)$ は電場 $E(x)$ に誘電率 ϵ_0 を掛けて得られるので

$$\sigma(x) = \epsilon_0 E(x) = \frac{\lambda a}{\pi(a^2 + x^2)}$$

