2008.5.19

電磁気学II演習　No.5

1. 点電荷 q、$-q$ がそれぞれ (0,0,d)、(0,0,$-d$) にあるとする。次の「　」に当てはまる式を書け。

   電荷から十分離れた点 P(x,y,z) における電位 $\phi(x,y,z)$ を求める。$\pm q$ の点電荷の対による点 P での電位は

   $$\phi(x,y,z) = \lceil\quad \mathbf{i} \quad\rceil$$

   と表される。原点 O から点 P までの距離 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ に比べ $2d$ が十分小さいとして、この式を近似したものが電気双極子 $\vec{p}$ による電位になる。$|t| \ll 1$ のとき $(1+t)^{-1/2} \cong 1-t/2$ を用いて、

   $$[x^2+y^2+(z\mp d)^2]^{-1/2} \cong (x^2+y^2+z^2\mp 2dz)^{-1/2} = r^{-1}\left(1\mp\frac{2zd}{r^2}\right)^{-1/2} \cong \lceil\quad \mathbf{ii} \quad\rceil$$

   これを「　i　」の式に代入して

   $$\phi(x,y,z) \cong \lceil\quad \mathbf{iii} \quad\rceil$$

   が得られる。

   次に、$\vec{E}(x,y,z) = -\vec{\nabla}\phi(x,y,z)$ の関係式を用いて $\vec{p}$ ($p=2qd$) による電場 $\vec{E}(x,y,z)$ を求める。

   $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \lceil\quad \mathbf{iv} \quad\rceil,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \lceil\quad \mathbf{v} \quad\rceil,\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \lceil\quad \mathbf{vi} \quad\rceil$$

   と与えられる。よって電場 $\vec{E}(x,y,z)$ の各成分は

   $$E_x = \lceil\quad \mathbf{vii} \quad\rceil$$
   $$E_y = \lceil\quad \mathbf{viii} \quad\rceil$$
   $$E_z = \lceil\quad \mathbf{ix} \quad\rceil$$

   となる。

   $+q$ と $-q$ の間隔 $2d$ が十分小さいと見なせる場合、この正負の電荷対を**電気双極子**といい、大きさが $p=2qd$ で、$-q$ から $+q$ への向きをもつベクトルを**電気双極子モーメント**と呼ぶ。

2. ３個の点電荷 $-q$、$2q$、$-q$ が同じ直線上に間隔 d をおいて並んでいるとき、電荷を含む直線上の静電ポテンシャル ϕ を d の２次の正しさで求めよ。（点電荷 $2q$ からの距離 r の点におけるポテンシャルを、$d \ll r$ で考える。）

3. 無限に長い直線上に線密度 λ で一様に分布した電荷によって生じる電界を直線からの距離 r の関数として求めよ。

真空の誘電率を ε_0 とする。また、すべて真空中とする。