

電磁気学II演習 No.9

1. (a) 導体の表面に垂直に、導体の内部に向けて x 軸を選ぶ。導体の表面に原点をとると、電場 $E(x)$ は導体の内向きが正として、

$$x < 0 \text{ では } E(x) = -E$$

$$x > d \text{ では } E(x) = 0$$

$$0 < x < d \text{ では } E(x) = (\rho/\varepsilon_0)x + C$$

$x = 0$ で電場が連続になることから、

$$E(0) = C = -E$$

したがって、

$$E(x) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}x - E \quad (0 < x < d)$$

$E(d) = 0$ より、

$$E = \frac{\rho d}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- (b) f は導体の外向きを正として、

$$f = - \int_0^d \left(\frac{\rho^2}{\varepsilon_0}x - \rho E \right) dx = - \left[\frac{\rho^2}{2\varepsilon_0}x^2 - \rho E x \right]_0^d = \frac{1}{2}E\sigma$$

2. 導体球の中心に原点をとり、原点での電位を 0 とすると、一様な電場 E_0 の点 $r = (x, y, z)$ での電位は

$$\phi_0(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$$

となる。また、原点におかれた電気双極子モーメント $\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0$ による電位は

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{R^3}{r^3} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})$$

である。ただし、 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ 。したがって、 $\phi_0(\mathbf{r})$ と $\phi_1(\mathbf{r})$ を重ね合わせると、導体球外部の領域 ($r \geq R$) における電位は

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}) + \phi_1(\mathbf{r}) = - \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})$$

となり、この電位は $r = R$ の球面で r の向きによらず 0 である。このように、 E_0 によって球面に誘導される電荷の分布の代わりに原点に電気双極子モーメント $p = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0$ がおかれていると考えれば、球面で「 $\phi = \text{一定}$ 」の境界条件を満たす電場を得る事ができる。球のまわりに生じる電場は、上式の電位 $\phi(r)$ で与えられる。

球面上の点 r における電場の表式は、

$$\mathbf{E}(r) = -\nabla\phi(r) = \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \nabla(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) - \nabla\left(\frac{R^3}{r^3}\right) (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})$$

において、偏微分を計算したのち $r = R$ とおけば得られる。すなわち、右辺の第 1 項は 0 に等しく、また

$$\begin{aligned} \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^3}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right) \\ &= \left(-\frac{3x}{r^5}, -\frac{3y}{r^5}, -\frac{3z}{r^5}\right) = -\frac{3}{r^5} \mathbf{r} \end{aligned}$$

となることにより、球面上での電場として

$$\mathbf{E}(r) = 3(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}/R^2$$

を得る。球面上の点 r において球面に垂直な単位ベクトルは $\mathbf{n}(r) = \mathbf{r}/R$ と表わされる。よって、点 r に生じる電荷の面密度は $E = \sigma/\epsilon_0$ より

$$\sigma(r) = \epsilon_0 \mathbf{E}(r) \cdot \mathbf{n}(r) = 3\epsilon_0 \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n}(r)$$

今までの配布物は“http://www.sci.himeji-tech.ac.jp/material/electro_phys/menber/ueda/ueda+/enshu/enshu.html” からダウンロードできます。