

電磁気学II演習 No.8

1. 円筒の中心軸を z 軸とする。電荷の分布が軸対称だから、それによって生じる電位も軸対称となり、中心軸からの距離 r だけの関数 $\phi(r)$ として与えられる。このとき、

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d\phi(r)}{dr} \right\} \quad (1)$$

が成り立つ。よって、ポアソンの方程式は

$$r > R \text{ のとき} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d\phi(r)}{dr} \right\} = 0 \quad (2)$$

$$r \leq R \text{ のとき} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d\phi(r)}{dr} \right\} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3)$$

$r > R$ のとき、(2) 式を積分して変形すると、 C_1 を積分定数として、次式を得る。

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{C_1}{r} \quad (4)$$

$r \leq R$ のときは、(3) 式の両辺に r を掛けてから積分すると、 C_2 を積分定数として、

$$\int \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d\phi(r)}{dr} \right\} dr = r \frac{d\phi(r)}{dr} = \int \left(-\frac{\rho}{\varepsilon_0} r \right) dr = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} r^2 + C_2$$

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} r + \frac{C_2}{r} \quad (5)$$

$r = 0$ (中心軸上) で、電場すなわち電位の微分係数 $d\phi(r)/dr$ は 0 である。よって、 $r = 0$ に対し (5) 式の両辺が 0 であるためには $C_2 = 0$ でなければならない。

また、 $r = R$ (円筒の側面上) で、 $d\phi(r)/dr$ が連続であることにより、(4)、(5) 式から

$$\frac{C_1}{R} = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} R$$

となり、 $C_1 = -\rho R^2/2\varepsilon_0$ 。したがって、 $\phi(R) = 0$ の条件のもとで、(4)、(5) 式を積分すると、

$$r \leq R \text{ のとき} \quad \phi(r) = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (6)$$

$$r > R \text{ のとき} \quad \phi(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \log \frac{R}{r} \quad (7)$$

を得る。

2. 電荷分布の対称性により、電位は球対称であり、中心からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ だけに依存した関数になる。このとき

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right\}$$

がなりたつ。したがって、ポアソンの方程式は

$$\begin{aligned} r > R \text{ のとき} \quad & \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right\} = 0 \\ r \leq R \text{ のとき} \quad & \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right\} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

これらの式を積分すると、 C_1 、 C_2 を積分定数として次式を得る。

$$\begin{aligned} r > R \text{ のとき} \quad & \frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \\ r \leq R \text{ のとき} \quad & \frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r + \frac{C_2}{r^2} \end{aligned}$$

ここで、 $r = 0$ で $d\phi(r)/dr = 0$ となるから、

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = 0 = \frac{C_2}{r^2} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \times 0 \quad \therefore C_2 = 0$$

また、 $r = R$ で $d\phi(r)/dr$ は連続だから、

$$\frac{d\phi(R)}{dr} = -\frac{\rho R}{3\varepsilon_0} = \frac{C_1}{R^2} \quad \therefore C_1 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} R^3$$

よって、

$$\begin{aligned} r > R \text{ のとき} \quad & \frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \\ r \leq R \text{ のとき} \quad & \frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \end{aligned}$$

これらの式を積分し、 $r \rightarrow \infty$ のとき $\phi(r) \rightarrow 0$ および $r = R$ で $\phi(r)$ が連続という条件が満たされるようにすると、

$$\begin{aligned} r > R \text{ のとき} \quad & \phi(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} \\ r \leq R \text{ のとき} \quad & \phi(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \end{aligned}$$

今までの配布物は“http://www.sci.himeji-tech.ac.jp/material/electro_phys/member/ueda/ueda+/enshu/enshu.html” からダウンロードできます。