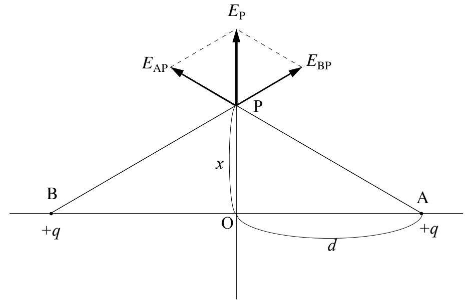
電磁気学II演習　解答No.3

1．点A、Bを右図のようにおく。



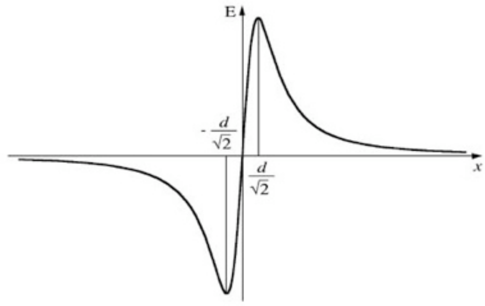
$$E_{\mathrm{AP}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{d^2+x^2}$$

$$E_{\mathrm{BP}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{d^2+x^2}$$

力の合成を考えると

$$E_{\mathrm{P}} = \left(E_{\mathrm{AP}} + E_{\mathrm{BP}}\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}}$$

$$= \frac{qx}{2\pi\varepsilon_0\left(d^2+x^2\right)^{3/2}}$$



$\dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}x} = 0$ を計算すると極大、極小は

$$x = \pm d/\sqrt{2}$$

そのときEは

$$E = \pm\frac{q}{3\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 d^2}$$

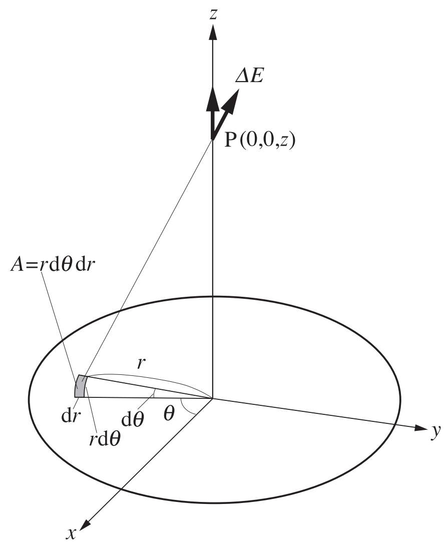
2.円板の電荷密度σは

$$\sigma = \frac{Q}{\pi a^2}$$

Aの部分の電荷 ΔQは

$$\Delta Q = A\sigma$$

より、AがPに作る電場ΔEは



$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\Delta Q}{r^2+z^2}$$

水平方向の成分は対称性からキャンセルするので、
z方向の成分

$$\Delta E' = \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\,\Delta E$$

のみを考える。

$$\Delta E = \frac{1}{r'^2+z^2}\cdot\sigma r'\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$E = \int_{円板}\Delta E' = \int_0^{2\pi}\int_0^{r}\frac{\frac{Q}{\pi a^2}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2+z^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\cdot r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

$$= \frac{Qz}{4\pi^2\varepsilon_0 a^2}\int_0^a\frac{r\,\mathrm{d}r}{\left(\mathrm{r}^2+z^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$t \equiv r^2 + z^2, \quad \mathrm{d}t = 2r\,\mathrm{d}r$

r	$0 \cdots\cdots a$
t	$z^2 \ \cdots \ a^2 + z^2$

$$\int_0^a \frac{r\,\mathrm{d}r}{\left(\mathrm{r}^2 + z^2\right)^{3/2}} = \int_{z^2}^{a^2+z^2} t^{-3/2} \frac{\mathrm{d}t}{2} = \left[-\frac{2}{\sqrt{t}}\right]_{z^2}^{a^2+z^2} = \frac{2}{|z|} - \frac{2}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

$$\therefore E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right)$$

3. 2の問いで$\dfrac{Q}{\pi a^2} = \sigma$とすると

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right)$$

$a \to \infty$とすると

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}$$