

電磁気学II演習 No.11

2008.6.30

問1

(a) $d' = a^2/d$ の距離の点P'に電荷 $q' = -aq/d$ があると 仮定 する。

P、P'から r_1 、 r_2 の距離にある電位 V は

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} \right)$$

で表わされる。導体表面の任意の位置にある点Qについて、 $\angle QOP$ をはさむ2辺の比が

$$\frac{d'}{a} = \frac{a^2}{da} = \frac{a}{d}$$

となって等しいので、 $\triangle OPQ$ と $\triangle OQP'$ は相似である。 $\therefore r_2/r_1 = a/d$ 。これを用いて、

$$\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} = \frac{q}{r_1} + \frac{-qa/d}{r_2} = q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{a}{r_2 d} \right) = q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{a}{d} \frac{d}{ar_1} \right) = 0$$

$\therefore$ Qの電位 $V = 0$

したがって、点P'に置かれた電荷 q' が電気映像になる。//

(b) 求める引力 F は、 q 、 q' 間のクーロン力である。

$$|PP'| = d - d' = d - \frac{a^2}{d} = \frac{(d^2 - a^2)}{d}$$

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 |PP'|^2} = \frac{q(-aq/d)}{4\pi\epsilon_0 \left((d^2 - a^2)/d \right)^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{ad}{(d^2 - a^2)^2} //$$

問2 導体球を 十分離しておけば、導体球が相互に与える影響は無視して良い。テキストの(4.13)式により、孤立した導体球の電気容量は $4\pi\epsilon_0 R$ である。電荷 Q を与えた時の静電エネルギーは、(4.18)式により $U = Q^2/8\pi\epsilon_0 R$ となる。

2個の導体球をつなぐと、両者のポテンシャルは等しくなり、電荷は $Q/2$ ずつ配分される。

したがって静電エネルギーは $U' = 2 \times (Q/2)^2 / 8\pi\epsilon_0 R = Q^2/16\pi\epsilon_0 R$ 。 $U' < U$ であり、接続によってエネルギーは減少する。