3　剛体

3.1　剛体とは

質点系において、それをつくるすべての任意の 2 質点間の距離が、考えている運動を通して一定であるものを**剛体**［rigid body］という。剛体も質点系の特別な場合であるが、質点の数がきわめて多く、力（正確には外力）を加えても変形しない理想的な物体である。剛体も質点と同様に観念的に作られたものであるが、現実には大きさをもち非常に硬い固体であると考えれば剛体に近いと云える。したがって、質点系で得られた一般的な性質は、剛体にもそのまま適用できるが、特に重要な性質は、重心の運動方程式と、角運動量変化に関する力のモーメント（トルク）の方程式である。いずれも剛体（質点系）への外力だけが関係していて、内力によらない。剛体では質点系同様、並進運動のほかに、回転運動も考える必要があり、この章では、そのため固有の物理量である**慣性モーメント**［moment of inertia］を導入し、主に剛体の回転を考えてみる。

3.2　剛体のつりあい

剛体がつり合って静止状態を保つためには、重心の移動（並進運動）がない（重心速度は変化しない）ことが第 1 の条件で、

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = 0 \tag{3–1}$$

すなわち、外力の総和が 0 になることが必要である。重心が静止していても、重心のまわりで回転していては、剛体として静止していることにはならない。したがって、剛体がつりあう (回転しない：角運動量が変化しない) ための第 2 の条件は、

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = 0 \tag{3–2}$$

が、なりたつことである。つまり、任意の固定点のまわりで外力のモーメントの和が 0 になることである。ついでに、このような剛体のつりあいを主にとりあつかう講義科目は**剛体静力学**［statics of a rigid body］である。

3.3　剛体にはたらく力

質点の場合と違って剛体には大きさがあるので、力が剛体のどこにはたらくかということについて考える必要がある。ここでは、以前に定義した**作用点**（力のはた

らく点）［point of application］、と**作用線**（作用点を通って力の方向に引いた直線）［line of action］を用いて考えてみよう。

ベクトル量は、大きさと向きが同じなら等しいと考えてよいが、図 (3-1) のように剛体にはたらく力 $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ では、剛体におよぼす効果は異なる。それぞれの作用点AとBを通る作用線については、「剛体のはたらく力のベクトルは作用線に沿って移動させることが出来る」が、任意に平行移動させることは出来ない。

普通にはベクトル量の合成には、平行四辺形の法則を使うが、図の $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ のように平行なベクトルでは、同一点を通らないから、次のような方法で合成する。

図 (3-2) に示すように、ベクトル $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ のもと（矢の始点）A ’とB ’を結ぶ直線上で、逆向きの力 $\boldsymbol{f}$ と $-\boldsymbol{f}$ を加える。$\boldsymbol{F}$ の大きさは任意で、$\boldsymbol{f}$ と $-\boldsymbol{f}$ はつり合っている力であるから、剛体におよぼす作用としては変わらない。$\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{f}$ で合成した力 $\boldsymbol{F'}_1$ と、$\boldsymbol{F}_2$ と $-\boldsymbol{f}$ で合成した力 $\boldsymbol{F'}_2$ の作用線が交わる点をOとする。つぎにOを基点とするように、$\boldsymbol{F'}_1$ と $\boldsymbol{F'}_2$ をそれぞれの作用線上で移動してから、平行四辺形の法則で両者を合成すれば $\boldsymbol{F}$ が得られ、これが $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ を合成した結果である。

$\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ の大きさが異なっても、また $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ が逆向きであっても、$\boldsymbol{f}$ と $-\boldsymbol{f}$ を両者に加えるという操作によって合成できることに注意してほしい。しかし、$\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ の大きさが等しく逆平行のときには、$\boldsymbol{f}$ と $-\boldsymbol{f}$ を加えても合成した力の作用線が交わらないので合成できない。このような場合の一対の力を**偶力**（あるいは力対）［couple of forces, couple］と云う。偶力がはたらくと物体は回転する。図 (3-3) から

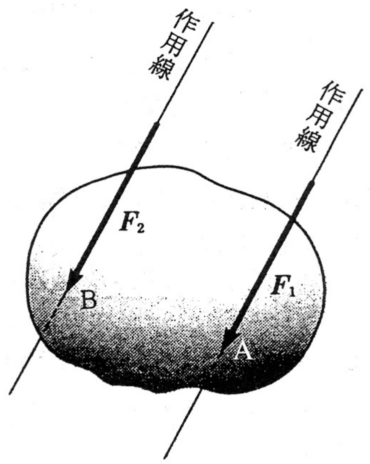

図 3 − 1:

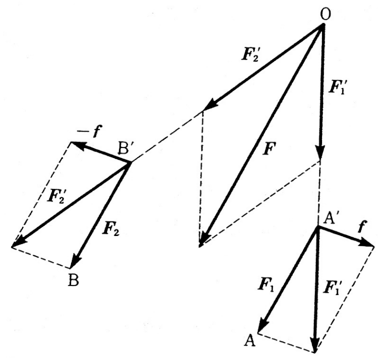

図 3 − 2:

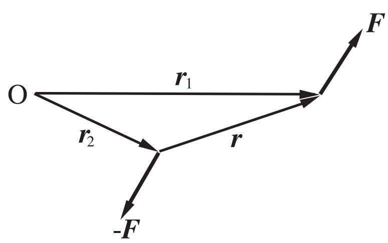

図 3 − 3:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{r}_2 \times (-\boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

の効果を与えることが分かる。これを偶力モーメントと呼ぶ。ここで $\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{F}$ の作用点から $-\boldsymbol{F}$ の作用点に至るベクトルである。つまり、$\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}$ でありさえすれば、個々の $\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ はどうでもよく、$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ が一定ならば、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{F}$ のおのおのを変化しても $\boldsymbol{N}$ への寄与は同じである。

すなわち、「偶力はそのモーメントを変えなければ、剛体上のどこへ移してもその効果は変わらない」ことが分かる。ついでに、偶力を構成するふたつの力 $\boldsymbol{F}$ と $-\boldsymbol{F}$ の距離（最短の長さ）を**偶力の腕**［arm of couple］という。

3.4　自由度と運動方程式

空間中にあって自由に運動する１個の質点の位置を指定するには、**デカルト座標**［Cartesian coordinates］なら x、y、z とか**球面極座標**［polar coordinates］なら r、θ、φ とかの３つの座標が必要である。ところが、質点が曲面や平面上に拘束されていると、位置の指定は２つの座標ですむし、曲線や直線上なら１つの座標で良い。このように位置や方向を指定する座標のうち、独立に変化できる（設定できる）ものの数を運動の**自由度**［degree of freedom］と云う。もし空間を自由に動く n 個の質点があれば、それらの位置を完全に記述するには、$3n$ 個の座標が必要であるから、運動の自由度は $3n$ であるという。剛体の場合には自由度はどうなるであろうか。

図 (3-4) のように、ある剛体の中に△ PQR の部分を任意に想定してみよう。P の位置は、x、y、z の３個の座標で決まるが、P を決めたら、PQ の距離 a は不変であるから、O の位置は P を中心に半径 a の球面上に制限される。つまり、Q に関しては独立に選べる変数の数は２である。

そしていったん P と Q が決まると、QR $= b$、PR $= c$ という制限があるから、R の位置は PQ を中心軸として回転する円周上になければならない。つまり R の位置に関して独立に選べる変数は、回転角だけであるので、変数の数は１である。剛体中の△ PQR の位置を決めるには、合計６個の変数で十分である（自由度は６である）。

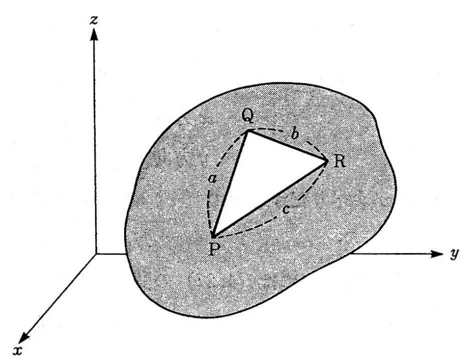

図３ – 4:

さらに４番目の質点については、△PQR の各３点 (P, Q, R) からの距離が一定となるから、その位置は一意に決まり、自由度は６のままである。以下同様にさらに質点の個数を増やしても、自由度は増えることがない。

結局、剛体の運動の自由度は６（=3+2+1）ということになる。剛体のつりあいのための方程式、運動用の重心の運動方程式とトルク方程式は、いずれもベクトル方程式なので、成分ごとに考えれば６個の方程式である。自由度が６、つまり未知数が６で方程式が６個あるから、方程式を解くことにより剛体の位置、方位や運動を一意的に決定することができる。

実際には、剛体の空間的配置は一般に重心の位置 $(x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}}, z_{\mathrm{G}})$ と重心のまわりの回転で決定される。回転は回転軸の方向を指定する２つの量とその軸の周りの回転角によって規定される。つまり剛体の配置もやはり６つの量で決まることになり、これは前に述べた自由度６と対応している。

したがって、運動方程式は重心の運動に関する

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}}{dt^2} = \sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F} \tag{3–3}$$

および重心の周りの回転に関する

$$\frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{N}'_i = \boldsymbol{N}' \tag{3–4}$$

で十分である。しかし式 (3-4) の代りに原点の周りの回転に関する

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{N} \tag{3–5}$$

を使う方が便利な場合もある。すなわち、剛体の平面運動のみをとりあげた場合には、回転の自由度は１でよく、回転軸のまわりの角度だけを考えてよい。

3.5　固定軸のまわりの回転

剛体に軸をとりつけてこれを空間に固定し、この軸のまわりに剛体が回転する運動についてしらべる。この運動は見かけ上３次元的なもののようであるが、実は１次元（自由度は１）である。なぜなら、固定軸を通ってこれに垂直な１つの直線を引き、これが空間の一方向から測った角度 $\boldsymbol{\omega}$ を与えれば剛体の位置は決まってしまうからである。自由度は１であるので運動方程式はただ１つでよい。（重心の運動を与える方程式はこの場合には必要ない。）

固定軸を z 軸にとり、回転の角速度ベクトル φ の向きを z 軸の正の方向に揃えておくことにする。角運動量の z 成分については、

$$\frac{dL_z}{dt} = N_z \tag{3–6}$$

が固定軸のまわりの剛体の回転運動を与える式となることがわかる。すなわち、式 (3-6) が、φ と外力の z 軸に関するモーメントの関係を与えることを次に示す。

固定軸上の１点を原点 O としておけば、剛体を構成する質点 P（質量 m_i 、$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{r}_i$）の速度は、回転の角速度 $\boldsymbol{\omega}$ によってのみ生ずるので、

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i$$

となる。

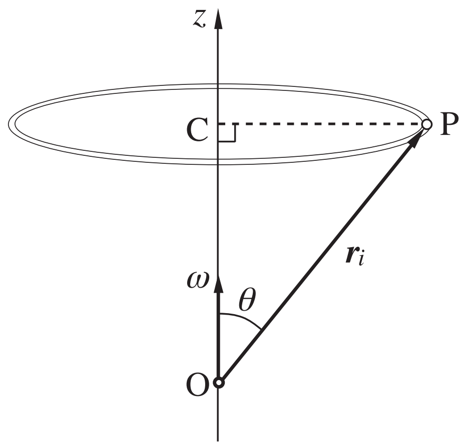

図 3 – 5:

補足：　回転によるベクトルの変化を考えてみる。図 (3-5) のように、固定点 O を起点とするベクトル $\boldsymbol{r}$ が、O を通る軸 OC のまわりに角速度 ω で回転しているときには、$d\boldsymbol{r}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ になる。（$\boldsymbol{\omega}$ は、回転軸をベクトルの方向とし右ねじが進む方向を正とする。）なぜならば、図 (3-5) から、$|\Delta\boldsymbol{r}| = \mathrm{CP}\omega\Delta t = \boldsymbol{r}\sin(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r})\omega\Delta t$、すなわち $|d\boldsymbol{r}/dt| = \omega r \sin(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r})$ で、$d\boldsymbol{r}/dt$ の方向・向きは $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ のそれと一致する事がわかるからである。

さて、この式を S(1.225) 式に代入し、ベクトル三重積の公式を用いれば、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_i m_i\{\boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)\} \\ &= \sum_i m_i\{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_i) - \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_i)\}\end{aligned}$$

$\omega_x = \omega_y = 0$、$\omega_z = \omega$ であることを考慮すると $\boldsymbol{L}$ の z-成分は、

$$L_z = \sum_i m_i\{\omega|\boldsymbol{r}_i|^2 - z_i(\omega z_i)\} = \sum_i m_i(|\boldsymbol{r}_i|^2 - z_i^2)\omega$$

となる。図 (3-5) を見ればわかるように $|\boldsymbol{r}_i|$ =OP で、z_i は P の z-座標であるから OC の大きさに等しい。したがって、$\boldsymbol{r}_i^2 - z_i^2 = \mathrm{CP}^2$ となり、質点 P から固定軸のへの距離 CP（これを r_i とおく）で表わすことができた。

$$L_z = (\sum_i m_i r_i^2)\omega \tag{3–7}$$

$\sum_i m_i r_i^2$ と云う物理量は剛体に対して固定軸を定めれば決定することができる剛体に固有な量（定数）となる。これを、

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2 \tag{3–8}$$

として、固定軸に関する**慣性モーメント**（慣性能率）［moment of inertia］と呼ぶ。式 (3-7) と式 (3-8) より、

$$L_z = I\omega \tag{3–9}$$

となる。一方、外力モーメントの z-成分は、

$$N_z = \sum_i (x_i Y_i - y_i X_i) \equiv N \tag{3–10}$$

であるので、式 (3-6)、式 (3-9)、式 (3-10) をまとめれば、I は定数なので、

$$I\frac{d\omega}{dt} = N \tag{3–11}$$

が得られる。さらに剛体が基準位置から回転角 φ だけまわったとすれば、$\omega = d\varphi/dt$ なので、

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = N \tag{3–12}$$

とも書ける。式 (3-11) または式 (3-12) は、剛体の固定軸のまわりでの回転に関する運動方程式である。

まとめると、外力の固定軸に関するモーメントの成分 $\boldsymbol{N}$ があると、剛体は角速度を生じ、その大きさは $\boldsymbol{N}$ に比例し、慣性モーメント I に反比例する。もちろん、外力がはたらかない場合あるいは外力がはたらいても固定軸に関するモーメントの和が 0 になれば、固定軸に関する剛体の角運動量 $I\omega$ は一定に保たれる。

補足：　角速度 $\boldsymbol{\omega}$ の向きについては、回転の反時計回り（上から見て左回り）を正、時計回り（上から見て右回り）を負とするのが、一般的でこのようなベクトルは、**擬ベクトル**［pseudo vector］と云われる。

補足：　**軸性ベクトル**（擬ベクトル）［axial vector］は、空間座標の反転に関しては符号（絶対値も）を変えないが、**極性ベクトル**［polar vector］は、反転に関しては、絶対値は変わらないが符号を変える。ついでに、**擬スカラー**［pseudo scalar］は、通常の大きさのみの量（例えば質量）でなく、極性ベクトルからつくられたスカラー（例えばスカラー三重積）のことで、空間座標の反転で絶対値は変わらないが符号を変える。

つぎに、固定軸のまわりの回転の簡単な例として高校物理からおなじみの振り子の運動を力学Aでは、剛体としてとりあつかう。この場合には振り子を**実体振り子**（物理振子、剛体振子）［physical pendulum］という。図 (3-6) に示すように、水平な固定軸Oの周りを回転する質量 M の剛体を考えよう。Oから重心 G までの距離

をh、OGが鉛直線となす角をθ、Oの周りの慣性モーメトンをIとすると、I_zについての運動方程式$I\ddot{\theta} = N$より、

$$I\ddot{\theta} = -Mgh\sin\theta \tag{3–13}$$

と書ける。高校物理であつかった単振り子の運動方程式$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$と比べると、実体振り子は長さ

$$l = \frac{I}{Mh} \tag{3–14}$$

の単振り子と等しい運動をすることがわかる。したがって、微小振動の周期は

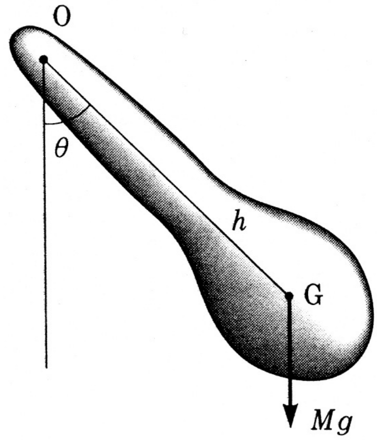

図 3 – 6:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}} \tag{3–15}$$

となる。この実体振り子については、あとでもう少し詳しく考えてみることにする。

3.6　慣性モーメント

3.6.1　質点についての運動方程式との比較

前述のように式 (3-8) ($I \equiv \sum_i m_i r_i^2$) を剛体の慣性モーメントと云い、次元は［ML^2］で単位はkgm^{2}である。固定軸のまわりの回転の運動方程式 (3-12) からも分かるように、慣性モーメントは回りにくさの度合いを表わすもので、質点系での質量mが動きにくさの度合いを表わすのに対応している。固定軸のまわりの回転では距離r_iは一定であるからIは定数となる。(厳密には、r_iは固定軸に垂直な成分のみの距離である。）このとき運動方程式 (3-5) のz-成分は

$$\frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N \tag{3–16}$$

と質点の運動方程式$m\ddot{x} = F$と比べてみよう。質量mが慣性の大きさを表すことを考えると、慣性モーメントIは回転に関する慣性の大きさを表していることがわかる。ただし、質量mは質点固有の量で常に一定であるが、慣性モーメントは固定軸（回転軸）をどのように選ぶかによる決められることに注意しよう。

回転の速度は、$v_i = \omega \times r$であるから、運動エネルギーはv_iの大きさの２乗に比例するので、

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{3–17}$$

となる。固定軸の周りの回転は自由度が１であるから、質点の直線運動との間に類似性が見られる。それを以下のように表にまとめられる。

直線運動		固定軸の周りの回転	
質量	m	慣性モーメント	I
変位	x	回転角	θ
速度	$v = \dot{x}$	角速度	$\omega = \dot{\theta}$
運動量	$p = mv$	角運動量	$L = I\omega$
力	F	力のモーメント	N
運動方程式	$\frac{dp}{dt} = F$	運動方程式	$\frac{dL}{dt} = N$
運動エネルギー	$\frac{1}{2}mv^2$	運動エネルギー	$\frac{1}{2}I\omega^2$

3.6.2　慣性モーメントの求め方

慣性モーメントは、

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2 \tag{3–18}$$

で定義される。これは、固定軸から r_i の距離のところに質量 m_i が分布する場合の式であるが、もし剛体の質量分布が連続的な場合には、重心の位置を求める際に用いたように、固定軸からの軸に対して垂直距離 r のところにある体積素片 $d\tau$ をとれば、少なくともこの内部では密度 ρ は一定と考えてよく、式 (3-18) は、次のようになる。

$$I = \int dm \cdot r^2 = \int \rho r^2 d\tau \tag{3–19}$$

$d\tau$ を座標の取り方で記述しなければならないが、いずれにしてもこの積分は一般に三重積分になる。式 (3-19) の r はあくまでも固定軸からの距離であり、極座標による $\boldsymbol{r}$ と混同しないように注意しておく。図 (3-7) から分かるように、固定軸からの距離の場合には r を $r\sin\theta$ とする必要がある。さらに、剛体の全質量を M とするときには、

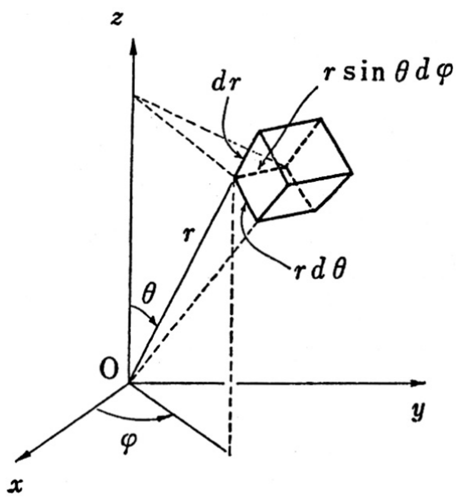

図 3 – 7:

$$I \equiv M\kappa^2 \tag{3–20}$$

とも表記できる。このときには、κ は、長さの次元をもつ量で、**回転半径**［radius of gyration］とよばれる、つまり剛体の慣性モーメントは、固定軸から κ の距離に剛体と等質量の質点がある場合の慣性モーメントと同等（等価）であることを表わす。これ以降は、剛体とその回転軸が与えられれば、この回転軸に関する慣性モーメントを求めることが必須になる。

そこで、慣性モーメントを計算する際に有用な関係式を述べよう。

「関係式１」　重心を通る軸に関する慣性モーメントを I_{G} とするとき、この軸と平行で h だけ離れた軸に関する慣性モーメント I は次式で与えられる。

$$I = I_{\mathrm{G}} + Mh^2 \tag{3–21}$$

[**証明**] 点Oを通る z 軸の周りの慣性モーメントを I とすると

$$I = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

である。重心系に変換すると、$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{r}'_i$ を代入して

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i[(x_{\mathrm{G}} + x'_i)^2 + (y_{\mathrm{G}} + y'_i)^2] \\ &= \sum_i m_i(x_{\mathrm{G}}^2 + y_{\mathrm{G}}^2) + \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2) \end{aligned}$$

となる。ここで $\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i = 0$ を用いた。右辺第２項は重心Gを通る z' 軸の周りの慣性モーメント I_{G} であり、z 軸と z' 軸との距離を h とすると $h^2 = x_{\mathrm{G}}^2 + y_{\mathrm{G}}^2$ であるから

$$I = I_{\mathrm{G}} + Mh^2 \tag{3–22}$$

が得られる。

「関係式 2」　平面板状の薄い剛体の面内に直交する２軸、x 軸、y 軸をとり、面に垂直に z 軸をとれば、

$$I_z = I_x + I_y \tag{3–23}$$

[**証明**] 図 (3-8) から、

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

両辺に m_i を掛けて i について加えれば

$$\sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i y_i^2 + \sum_i m_i x_i^2$$

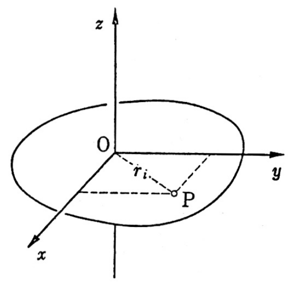

図 3 − 8:

y_i は質点 P の x 軸からの距離であるから

$$\sum_i m_i y_i^2 = I_x$$

である。同様にして $\sum_i m_i x_i^2 = I_y$ となるから

$$I_z = I_x + I_y$$

つぎに代表的な８つの形状をもつ剛体について、それぞれ回転軸を決めて慣性モーメントを計算しておく。計算過程を見るだけではだめで、かならず自分で計算しておくことが必要である。ただし、これらの８つの場合、いずれも重心を通る軸についての慣性モーメントとする。

(1) 長さ l の細いまっすぐな棒　図 (3-9) のように重心 (中点) を通って棒に垂直な直線に関する慣性モーメントは、**線密度**［linear density］を λ とすれば、x のところにある線素片 dx の質量は λdx であるから

$$I = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \lambda dx \cdot x^2 = \frac{1}{12}\lambda l^3$$

となる。ところで $M = \lambda l$ であるから

$$I = M\frac{l^2}{12} \qquad (3\text{–}24)$$

である。

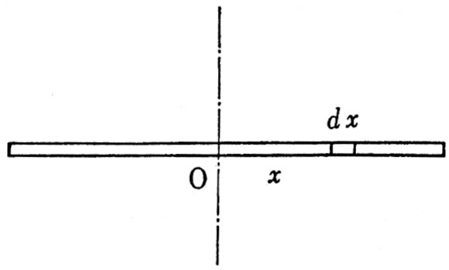

図 3 − 9:

(2) 各辺が a と b の薄い長方形の板　図 (3-10) のように軸を選び、長方形は x 軸方向に a、y 軸方向に b の長さの辺であるとする。板を y 軸に平行な細い棒に分けて、式 (3-24) を適用すれば

$$dI_x = dm\frac{b^2}{12}$$

さらに、これを積分して、

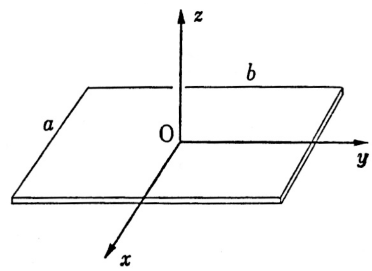

図 3 − 10:

$$I_x = M\frac{b^2}{12} \tag{3–25}$$

をうる。このことを別の表現でいえば、x 軸方向からこの板を見れば長さ b の細い棒に見えるので、同様の結果が得られたわけである。x 方向の奥行きは一様なので、全く同様に計算でき、

$$I_y = M\frac{a^2}{12} \tag{3–26}$$

をうる。これに「関係式 2」を適用すれば

$$I_z = I_x + I_y = M\frac{a^2+b^2}{12} \tag{3–27}$$

となる。

(3) 各稜が a、b、c の直方体　図 (3-11) のように軸を選び、直方体は x 軸方向に a、y 軸方向に b、z 軸方向に c の長さの稜をもっているとしておく。x 軸方向から見れば、b、c を 2 辺とする長方形の板に見えるから、式 (3-27) を用いて

$$\left.\begin{array}{rcl} I_x &=& M\frac{b^2+c^2}{12} \\ \text{同様に} & & \\ I_y &=& M\frac{c^2+a^2}{12},\ I_z = M\frac{a^2+b^2}{12} \end{array}\right\} \tag{3–28}$$

が得られる。

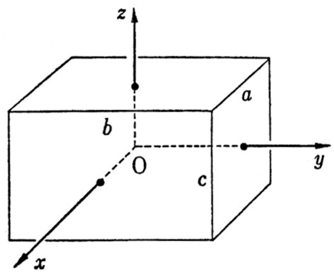

図 3 − 11:

(4) 半径 a の薄い円板　円板の中心を原点 O とし、円板の面内に x 軸、y 軸をとり、O を通って円板に垂直に z 軸をとる。平面の極座標を図 (3-12) のように選び、O から距離 r のところに面積素片 $dr \cdot r\,d\varphi$ をとれば、**面密度**［surface density］を σ として、

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \sigma dr\, r d\varphi \cdot r^2 = 2\pi\sigma \int_0^a r^3 dr \\ &= \frac{1}{2}\sigma\pi a^4 \end{aligned}$$

ところで、$M = \sigma\pi a^2$ であるから

$$I_z = M\frac{a^2}{2} \tag{3–29}$$

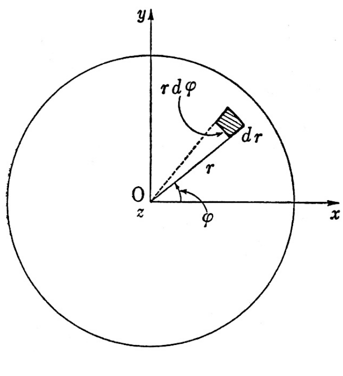

図 3 − 12:

となる。平面状の剛体であるから、「関係式２」を用いれば

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = M\frac{a^2}{4} \tag{3–30}$$

となる。

（別法）　図 (3-13) のように、z 軸に関する慣性モーメントは、２つの同心円で切り取られる細い円輪部分の積分でも求められる。円輪ではその全質量が O から一定の距離 r だけ離れているので、z 軸に関する慣性モーメントは

$$dI_z = \sigma 2\pi r dr \cdot r^2$$

であると考えられる。これを r について 0 から a まで積分すれば、前述と同じ

$$I_z = 2\pi\sigma \int_0^a r^3 dr = M\frac{a^2}{2} \tag{3–31}$$

が得られる。

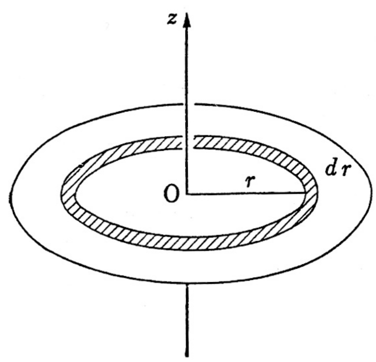

図 3 – 13:

(5) 半径 a の細い円輪　軸の選び方は、前述と同様にすれば、

$$I_z = Ma^2 \tag{3–32}$$

したがって

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = M\frac{a^2}{2} \tag{3–33}$$

となる。

(6) 半径 a、高さ l の直円柱　図 (3-14) のように軸を選び、直接積分によって計算することは、各自にまかせることにして、別法として直観的に結論を求めてみる。まずこの円柱を z 軸のほうから見れば半径 a の円板と同等に見えるから、式 (3-29) と同様であると考えて

$$I_z = M\frac{a^2}{2} \tag{3–34}$$

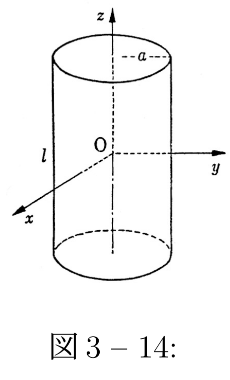

図 3 – 14:

となる。$I_x = I_y$ ではあるが、平面状の剛体ではないので、$I_z/2$ とは異なる。もし長さ l が小さくて無視できる程度であれば、I_z は円板をその面内を通る軸のまわりに

回わす場合と同じであるから、式 (3-30) と同様で、$Ma^2/4$ となる。逆にもし a が小さくて無視できるならば、I_x は細い棒をその重心を通って棒に垂直な軸のまわりに回わすときと同じであるから、式 (3-24) から $Ml^2/12$ となる。l も a も無視できない一般の直円柱では、

$$I_x = I_y = M\left(\frac{a^2}{4} + \frac{l^2}{12}\right) \tag{3–35}$$

となる。

(7) 半径 a の一様な球　図 (3-15) のように極座標を選び、(r, θ, φ) のところに体積素片

$$dr \cdot r d\theta \cdot r \sin\theta \, d\varphi$$

を考える。これは z 軸から $r\sin\theta$ だけ離れているから

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho dr\, r\, d\theta\, r\sin\theta\, d\varphi (r\sin\theta)^2 \\ &= \rho \int_0^a r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi\rho \int_0^a r^4 dr \int_0^\pi (\sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta) d\theta \\ &= \frac{8}{3}\pi\rho \int_0^a r^4 dr = \frac{8}{15}\pi\rho a^5 \end{aligned}$$

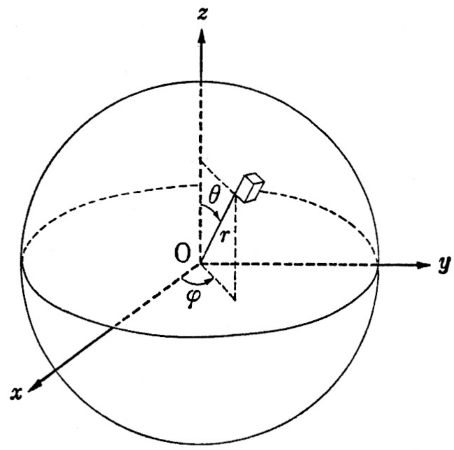

図 3 – 15:

ところで、$M = \rho\frac{4}{3}\pi a^3$ であるから

$$I_z = I_x = I_y = M\frac{2}{5}a^2 \tag{3–36}$$

が得られる。なお、式 (3-36) の結果は、薄い球殻の慣性モーメントから一重積分で求めることができる。

3.6.3　実体振り子の再考察

3.5 で簡単にふれた剛体につけた固定軸を水平に保って、重力の作用のもとで剛体を振動させる器械の運動を詳しく考えてみよう。図 (3-16) に示されているように O を水平固定軸、G を重心、OG≡ h で OG が鉛直下向きとなす角を φ とする。剛体にはたらく力は、G に作用する鉛直下向きの重力 Mg と軸 O にはたらく抗力である (図には抗力は書かれていない)。しかしながらこの運動は、O に関する回転を扱う

ので、この抗力のOに関するモーメントは当然のことながら0となり、考えなくてよい。重力 Mg のOに関するモーメントは、図に示されているように、$\overrightarrow{Mg} \times \overrightarrow{h}$ になり、作用線にOから下ろした垂線の長さが $h\sin\varphi$ なので、モーメントの大きさは $Mgh\sin\varphi$ である。したがって運動方程式は、式 (3-12) から

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mgh\sin\varphi \tag{3–37}$$

となる。小振動を考えるときは φ は小さく、$\sin\varphi \fallingdotseq \varphi$ と考えてよい。このとき、式 (3-37) は

$$\ddot{\varphi} = -\frac{Mgh}{I}\varphi \tag{3–38}$$

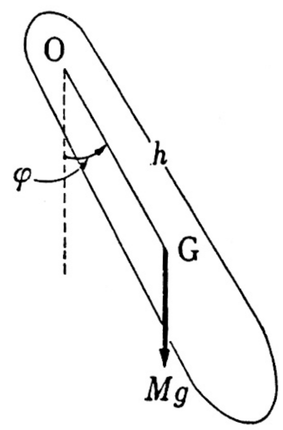

図 3 – 16:

となるが、これは前述のように単振動の式である。その周期は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}} \tag{3–39}$$

となる。単振子の周期の式 ($T = \sqrt{l/g}$) と比較すれば、式 (3-39) の周期は

$$l = \frac{I}{Mh} \tag{3–40}$$

である糸の長さの単振子の周期と同じであると考えられる。このように質点の場合と対応づけられた単振子を、**相当単振子**［equivalent simple pendulum］といい、l を**単振子相当長**［equivalent length］とよぶ。「関係式 2」によれば $I = I_\mathrm{G} + Mh^2$ であるから、これを S(1.289) に代入すれば

$$l = \frac{I_\mathrm{G}}{Mh} + h \tag{3–41}$$

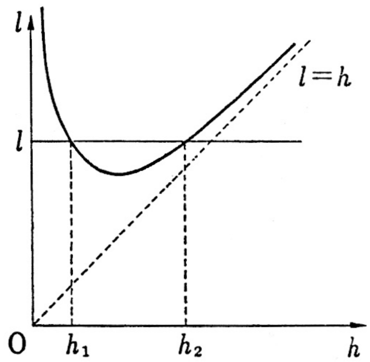

図 3 – 17:

となる。図 (3-17) は、h-l 曲線で、$h \to 0$ すなわち固定軸を重心へと近づけると $l \to \infty$、すなわち周期 $T \to \infty$ となる。また逆に $h \to \infty$ としても $T \to \infty$ となる。ある h の値で l は極小、すなわち最小周期で振動する。一般に、ある周期 T すなわち l においてこれを満足する h は、2 個あることが図 (3-17) からわかる。逆にいえば、固定軸を重心から h_1 および h_2 のところにつけるときは、周期が変わらないと

いうことである。この h_1 と h_2 との関係は、h の二次方程式 (3-41) の根であるから

$$h_1 + h_2 = l \tag{3–42}$$

である。

この問題における h が式 (3-42) の h_1 にあたると考えるとき、$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ の延長上に O'を、OO'=l になるようにとれば、S(1.291) から O'G=h_2 である。すなわち O に固定軸をつけて振動させても、O' に O につけた固定軸と平行な固定軸をつけて振動させても全く同じ周期で振動することになる。このような O' を O に対する**振動の中心**［center of oscillation］とよぶ。逆に O を O' に対しても同様に振動の中心となる。

重心 G の両側に O、O' の 2 点を見つけ、そのどちらでつるして振動させても周期が等しくなるようにすれば、OO'=l であり、周期 T を測定すれば、$T = 2\pi\sqrt{l/g}$ を用いて

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \tag{3–43}$$

として重力の加速度の大きさ g を算出することができる。このような器械を**可逆振子**［reversible pendulum］という。式 (3-43) は単振子にもなりたつ式であるから、単振り子でも g の測定ができそうであるが、単振り子は理想的なものでその完全な実現は不可能であるので、実際には実体振り子（物理振子）が必要となる。単振り子はこのような意味から数学的振子とも云われている。

3.7　剛体の平面運動

剛体をあつかう際の重心に関する運動量と角運動量を、まず述べておく。2.4.2(b) で質点系での運動を考えた内容がそのまま剛体に適用できる。すなわち、剛体の運動は、全質量が重心に集まり、そこへ外力の和が作用している質点の運動として扱える。また、剛体での原点 O に関する角運動量は、重心 G に全質量が集中したと考えたときの O に関する角運動量と、重心に関する角運動量との和に等しい。$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} \times M\boldsymbol{v}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}$ を t で微分すれば

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{G}} \times M\boldsymbol{v}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} \times M\frac{d\boldsymbol{v}_{\mathrm{G}}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}}{dt}$$

であるが、$\boldsymbol{v}_{\mathrm{G}} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{G}} = 0$、および式 (3-3) によれば $M\frac{d\boldsymbol{v}_{\mathrm{G}}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{F}_i$ であるから

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} \times \left(\sum_i \boldsymbol{F}_i\right) + \frac{d\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}}{dt}$$

また

$$\boldsymbol{N} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i (\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{r}'_i) \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} \times \left(\sum_i \boldsymbol{F}_i\right) + \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i$$

である。式 (3-5) によれば、上の 2 式の左辺は、$d\boldsymbol{L}/dt = \boldsymbol{N}$ で等しいから

$$\frac{d\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i \tag{3–44}$$

あるいは、外力の重心に関するモーメントを

$$\boldsymbol{N}_{\mathrm{G}} \equiv \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i \tag{3–45}$$

とすれば、

$$\frac{d\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}}{dt} = \boldsymbol{N}_{\mathrm{G}} \tag{3–46}$$

が得られる。すなわち、

重心に関する角運動量の時間的変化の割合は、重心に関する外力のモーメントに等しい。

重心は動いているにもかかわらず、慣性系に対して静止する点 O のまわりの回転の式と全く同形の式がなりたつので非常に都合がよい。

3.4 で述べたように、剛体の平面運動の自由度は 3 である。なぜならば剛体の重心を通って定平面に平行な面を改めて運動平面 (xy 面) としてとれば、重心の座標 x_{G}、y_{G} と、剛体の回転した角 φ（重心を通って xy 面内で剛体に固定した直線が面内の基準方向となす角）との 3 つの独立な座標を与えれば、剛体の位置は定まるからである。

したがって、剛体の平面運動を一意に記述するには、運動方程式は 3 個必要である。それには、

$$\left.\begin{array}{rcl} M\ddot{x}_{\mathrm{G}} &=& \sum_i X_i \\ M\ddot{y}_{\mathrm{G}} &=& \sum_i Y_i \end{array}\right\} \tag{3–47}$$

と、式 (3-46) の $\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}$ の z-成分については、

$$(\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}})_z = I_{\mathrm{G}}\omega$$

となる。また $\boldsymbol{N}_{\mathrm{G}}$ の z-成分を N_{G} とおけば、式 (3-46) の z-成分は

$$I_{\mathrm{G}}\frac{d\omega}{dt} = N_{\mathrm{G}} \tag{3–48}$$

あるいは

$$I_{\mathrm{G}}\ddot{\varphi} = N_{\mathrm{G}} \tag{3–49}$$

となる。式 (3-47) と式 (3-49) が剛体の平面運動を与える基礎の運動方程式である。

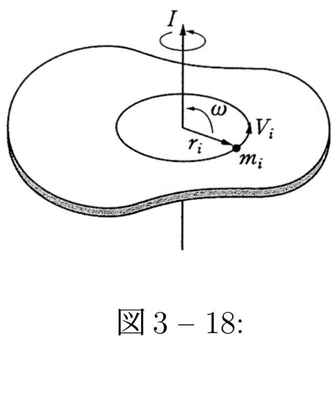

図 3 – 18:

式 (3-47) は単に「重心の運動方程式」ともよばれ、剛体の**並進運動**［translation］、すなわち、全質量が重心に集中し外力がすべてこの点に作用したと考えるときの質点の運動を与える式である。式 (3-49) は重心のまわりの**回転運動**［rotation］を与える。このように、剛体の平面運動は並進と回転との組合せとして扱う。

剛体の平面運動のエネルギーについては、すでに質点系での記述2.5.1がそのまま成り立つが、剛体が回転する際の、回転エネルギーと外力のモーメントがする仕事を加えておく。図 (3-18) の微小部分 m_1 の回転の運動エネルギーは、

$$K_i = \frac{1}{2}m_iV_i^2 = \frac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2$$

と表わされるので、これを剛体全体について和をとると、

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \left(\frac{1}{2}m_ir_i^2\,\omega^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_ir_i^2\right)\cdot\omega^2$$

となる。ここで、$\sum_i m_ir_i^2 = I$ であるから、

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{3–50}$$

が得られる。

つぎに、剛体が回転したときに、外力モーメントがする仕事は、図 (3-19) に示されるように、r_i の位置に外力 F_i を作用させて棒を $\Delta\theta$ 回転するのに必要な仕事 ΔW_i は、$\Delta W_i = F_i\cdot\Delta S_1 = F_i\cdot(r_i\times\Delta\theta) = (r_i\times F_i)\cdot\Delta\theta$（スカラー３重積より）、また $N_i = r_i\times F_i$ であるから、

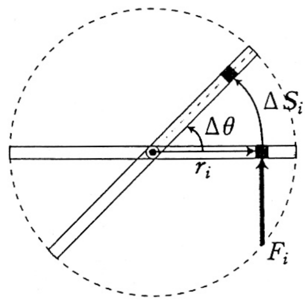

図 3 − 19:

$$\Delta W_i = N_i\Delta\theta$$

剛体全体では $\Delta W = N\Delta\theta$ になる。したがって、θ_1 から θ_2 まで回転した場合には、外力モーメントがする仕事は、

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} N d\theta \tag{3–51}$$

で得られる。

式 (3-50) と関連づけると、式 (3-51)$=\frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$ である。ただし、ω_2 と ω_1 は、各々θ_2 と θ_1 での角速度である。すなわち、剛体の平面での運動エネルギーは、

$$T = \frac{1}{2}MV_{\mathrm{G}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{G}}\omega^2 \tag{3–52}$$

で、$\frac{1}{2}I\omega^2$ に対応して、$\frac{1}{2}I_{\mathrm{G}}\omega^2$ は重心のまわりの回転についての運動エネルギーである。

平面運動をする剛体の運動エネルギーは、全質量が重心に集中したと考えるときの並進の運動エネルギーと重心のまわりの回転の運動エネルギーとの和である。逆に、「外力のなす仕事は重心の移動によるものと重心のまわりの回転によるものとの和である」と云える。

特に、外力が保存力である場合には

$$\frac{1}{2}MV_{\mathrm{G}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{G}}\omega^2 + U = \mathrm{const.} \tag{3–53}$$

という力学的エネルギー保存の法則がなりたつ。

ここで、簡単な例題として図 (3-20) のような Atwood の器械での運動を考えてみよう。滑車の半径を a、慣性モーメントを I とし、おもりの質量をそれぞれ m_1、m_2 とする。図 (3-20) のようにおもり 1（質量 m_1）が速さ v で下降するとすれば、おもり 2（質量 m_2）は当然速さ v で上昇するが、このとき滑車は角速度 ω で糸がすべらずに回転するものとしておく。

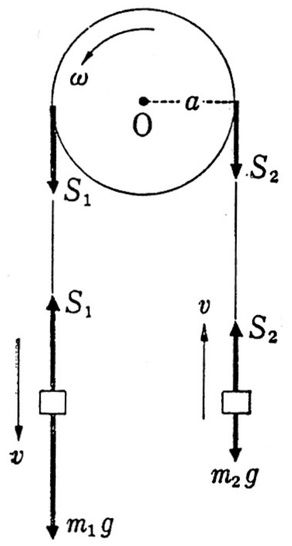

図 3 − 20:

おもり 1 に外部からはたらく力は鉛直下向きの重力 m_1g と、鉛直上向きの糸の張力 S_1 である。下向きを正にして運動方程式をたてれば

$$m_1\frac{dv}{dt} = m_1g - S_1 \tag{3–54}$$

となる。おもり 2 については上向きに考えると、同様にして

$$m_2\frac{dv}{dt} = -m_2g + S_2 \tag{3–55}$$

滑車に外部からはたらく力は糸の張力 S_1、S_2 であるから、回転軸 O のまわりの回転の運動方程式は、式 (3-11) から

$$I\frac{d\omega}{dt} = aS_1 - aS_2 \tag{3–56}$$

となる。ここで、糸は滑車に対してすべらないから

$$v = a\omega \tag{3–57}$$

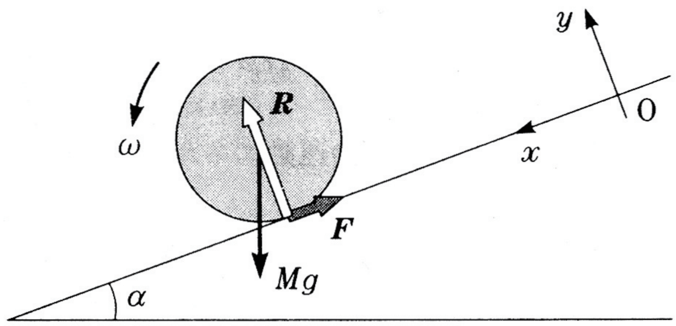

図 3 – 21:

という関係がなりたつ。以上の４式から４個の未知量 $\dot{v}$、$\dot{\omega}$、S_1、S_2 を一意に求めることができる。すなわち

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(m_1 - m_2)a^2}{I + (m_1 + m_2)a^2}g \tag{3–58}$$

が得られる。式 (3-58) によれば、$m_1 > m_2$ のとき $dv/dt > 0$ であり、直感的にもごく自然であることがわかる。

さて、次の例題として斜面を落下する円柱を考える。図に示すように、質量 M、半径 a の円柱が水平と角 α をなす斜面に沿って落下する運動で、作用する力は重力 Mg、垂直抗力 R、摩擦力 F である。斜面に沿って下向きに x 軸をとると、運動方程式は

$$\left.\begin{array}{rcl} M\ddot{x} & = & Mg\sin\alpha - F \\ 0 & = & -Mg\cos\alpha + R \\ I\dot{\omega} & = & aF, \quad I + \frac{1}{2}a^2 M \end{array}\right\} \tag{3–59}$$

と書ける。静止摩擦係数を μ_0 として

$$F < \mu_0 R + \mu_0 Mg\cos\alpha \tag{3–60}$$

の場合、円柱は斜面を滑らずに転がる。このとき円柱の回転角を θ とすると

$$x = a\theta, \quad \dot{x} = a\omega, \quad \ddot{x} = a\dot{\omega}$$

であるから

$$F = \frac{1}{a}I\dot{\omega} = \frac{1}{2}M\ddot{x} \tag{3–61}$$

となる。したがって、式 (3-59) の第１式より

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha \tag{3–62}$$

となる。これは等加速度運動であり、円柱が落下する加速度は質点の場合の 2/3 倍になっている。式 (3-59) を積分し、初期条件を $t=0$ で $\dot{x}=x=0$ とすると

$$x=\frac{1}{3}gt^2\sin\alpha \tag{3–63}$$

が得られる。

円柱が滑らない場合、摩擦力は仕事をしないから力学的エネルギーは保存される。すなわち位置エネルギーは $x=0$ を基準点とすると $U=-Mgx\sin\alpha$ であるから、力学的エネルギー保存の法則は

$$\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}I\omega^2-Mgx\sin\alpha=0 \tag{3–64}$$

と書ける。ここで回転の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{4}Ma^2\omega^2=\frac{1}{4}M\dot{x}^2$$

であるから、式 (3-64) の右辺第 1 項と第 2 項の比は２：１となる。したがって、位置エネルギーから変換された運動エネルギーのうち 1/3 が回転に使われ、2/3 が重心の落下運動に使われることになる。

式 (3-62) を式 (3-61) に代入すると摩擦力は

$$F=\frac{1}{3}Mg\sin\alpha$$

となるから、滑らない条件式 (3-60) は

$$\tan\alpha<3\mu_0 \tag{3–65}$$

と書ける。

つぎに、斜面の傾斜角が大きくなり

$$\tan\alpha>3\mu_0$$

の場合には、円柱は滑りながら転がる。このとき運動摩擦係数を μ とすると摩擦力は

$$F=\mu Mg\cos\alpha \tag{3–66}$$

であるから、運動方程式 (3-59) は

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= Mg\sin\alpha-\mu Mg\cos\alpha \\ I\dot{\omega} &= a\mu Mg\cos\alpha \end{aligned}$$

と書ける。つまり

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)\\ \dot{\omega} &= \frac{2\mu g}{a}\,\cos\alpha\end{aligned}$$

である。これも等加速度運動であるから、$t = 0$ で $\dot{x} = \omega = 0$ とすると

$$\begin{aligned}\dot{x} &= gt\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)\\ \omega &= \frac{2\mu g}{a}\,t\,\cos\alpha\\ x &= \frac{1}{2}gt^2\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)\end{aligned}$$

が得られる。滑りの速度は

$$u = \dot{x} - a\omega = gt\left(\sin\alpha - 3\mu\,\cos\alpha\right) \tag{3–67}$$

となる。

円柱が滑る場合、力学的エネルギーは

$$\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - Mgx\sin\alpha = \frac{1}{2}\mu Mg^2t^2\cos\alpha\left(\sin\alpha - 3\mu\cos\alpha\right)$$

となり、保存されずに減少する。円柱の滑りにともなって摩擦力がする仕事は

$$W_f = -\int_0^t Fu\,dt$$

であり、式 (3-66)、式 (3-67) を代入し、積分すると減少したエネルギー（例えば摩擦熱として発生）に等しいことが確かめられる。

3.8 撃力［impulsive force］による運動

剛体の点 $(x_i,\,y_i)$ に撃力 $(X_i,\,Y_i)$ がはたらき、重力などのようなあまり大きくない普通の力 $(X_k^0,\,Y_k^0)$ が点 $(x_k,\,y_k)$ にはたらくときの、固定軸のまわりの回転の運動方程式は、式 (3-11) から

$$I\frac{d\omega}{dt} = \sum_i (x_iY_i - y_iX_i) + \sum_k (x_kY_k^0 - y_kX_k^0) \tag{3–68}$$

である。これを撃力の作用する短い時間 t_1 から t_2 まで積分すれば

$$I\omega_2 - I\omega_1 = \sum_i (x_i\overline{Y}_i - y_i\overline{X}_i) \tag{3–69}$$

が得られる。ここで、撃力の力積 $\overline{X}_i \equiv \int_{t_1}^{t_2} X_i dt$ は例えば重力のような力の力積 $\int_{t_1}^{t_2} X_k^0 dt$ に比べてずっと大きいので、式 (3-68) の右辺第１項の積分だけが角運動量の変化に寄与し、第２項の積分の寄与は省略してもよいと考えられる。したがって式 (3-69) は、

$$I\omega_2 - I\omega_1 = \sum_i (\pm) p_i \overline{F}_i) \tag{3–70}$$

とも書ける。あるいはこれらを

$$I\omega_2 - I\omega_1 = \overline{N} \tag{3–71}$$

と書いてもよい。これは、運動量の変化の式

$$mu_2 - mu_2 = \overline{X}$$

と対応する式である。

式 (3-71) は、「固定軸に関する角運動量の増加は、この軸に関する撃力の力積のモーメントに等しい」と記述できる。

以上、撃力による運動をまとめると、剛体に撃力 $\overline{\boldsymbol{F}}$ が作用して、重心の速度の変化 Δv、重心の周りの角速度の変化 $\Delta\boldsymbol{\omega}$ が生じたとすると、運動量の変化 $\Delta\boldsymbol{P}$ と角運動量の変化 $\Delta\boldsymbol{L}'$ は

$$\Delta\boldsymbol{P} = M\Delta\boldsymbol{v}_{\mathrm{G}} = \int \boldsymbol{F} dt = \overline{\boldsymbol{F}} \tag{3–72}$$

$$\Delta\boldsymbol{L}' = I_{\mathrm{G}}\Delta\boldsymbol{\omega} = \int \boldsymbol{N}' dt = \overline{\boldsymbol{N}}' \tag{3–73}$$

で与えられる。

例として、「衝撃の中心」を考えることにする。図 (3-22) に示すように、静止している剛体に撃力 $\overline{\boldsymbol{F}}$ を点 P において線 OGP に垂直に加わった。$\overline{\mathrm{GP}} = x$ とすると、式 (3-72) と式 (3-73) は

$$\begin{aligned} \Delta P &= Mv_{\mathrm{G}} = \overline{F} \\ \Delta L' &= I_{\mathrm{G}}\omega = \overline{N'} = x\overline{F} \end{aligned}$$

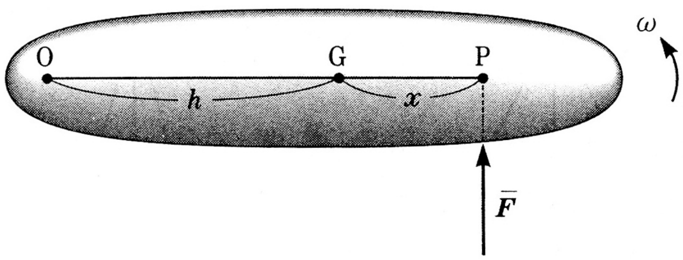

図 3 – 22:

となる。$\overline{\mathrm{OG}} = h$ とすると、点 O の速度の OG に垂直な成分は

$$v_{\mathrm{O}} = v_{\mathrm{G}} - h\omega = \overline{F}\left(\frac{1}{M} - \frac{hx}{I_{\mathrm{G}}}\right)$$

となる。したがって

$$x = \frac{I_{\mathrm{G}}}{Mh}$$

のとき点 O は動かないので、点 P に与えた撃力の衝撃を点 O は受けることはなく、剛体は O を中心として回転する。点 P を点 O に対する「衝撃の中心」という。

このとき OP 間の距離は

$$x + h = \frac{1}{Mh}\left(I_{\mathrm{G}} + Mh^2\right) = \frac{I}{Mh}$$

となり、これは実体振り子の単振り子に相当する長さ式 (3-14) に等しい。

例題　水平な床の上に静止している質量 M、半径 a の一様な球の、床から高さ h の点を水平方向に棒で突いた。球が水平方向に受けた力積を F_τ、球と床の間の動摩擦係数を μ として、その後の運動を求めよう。

図 (3-23) のように x 軸をとる。球が動き出すときの重心（中心）の速度を v_0、重心のまわりの角速度 ω_0 をとする。衝撃を受ける前後の球の運動量変化 Mv_0 と角運動量変化 $I_0\omega_0$ はそれぞれ球の受ける力積の大きさ F_τ、重心のまわりの角力積の大きさ $(h-a)F_\tau$ に等しい。

$$Mv_0 = F_\tau, \qquad v_0 = \frac{F_\tau}{M} \qquad (3\text{–}74)$$

$$I_0\omega_0 = (h-a)F_\tau, \quad \omega_0 = \frac{(h-a)F_\tau}{I_0} \qquad (3\text{–}75)$$

以上の式から F_τ を消去し、球の慣性モーメントの式 () を使うと ω_0 と v_0 の間には次の関係が成り立つ。

$$\omega_0 = \frac{M(h-a)}{I_0} = \frac{5}{2}\left(\frac{h}{a} - 1\right)\frac{v_0}{a} \qquad (3\text{–}76)$$

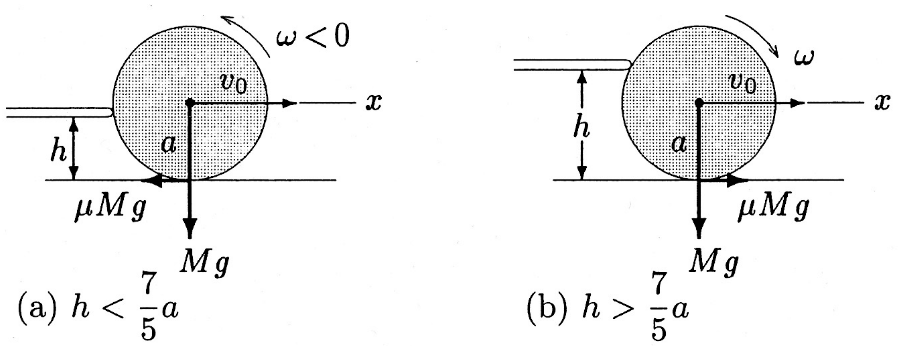

図 3 – 23:

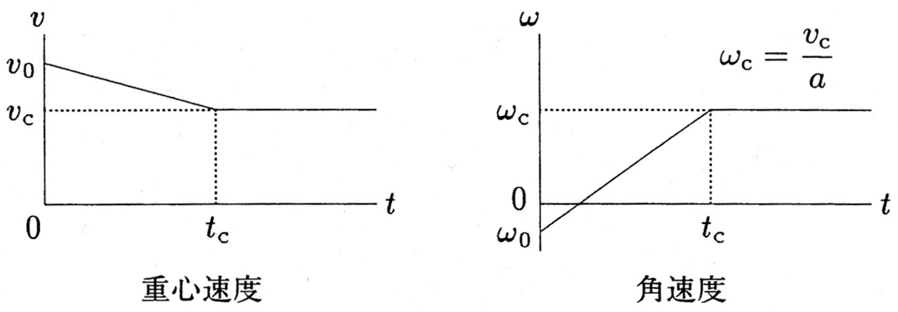

図 3 – 24:

床と接触する球の最下点の $+x$ 方向の速度、すなわち滑りの速さ v_1 は

$$v_1 = v_0 - a\omega_0 = \frac{7a - 5h}{2a} v_0 \tag{3–77}$$

である。したがって球の運動はの値によって次のように分けられる。

1. $h = 7a/5$ の場合：$v_1 = 0$ なので球は滑らずに転がり始め、そのままその運動を続ける。この場合には突いた点は床との接点に対して打撃の中心になっている。

2. $h < 7a/5$ の場合：滑りの速さは $v_1 > 0$ なので、球は $-x$ 方向に摩擦力 μMg を受ける。ただし μ は床との間の動摩擦係数である。球のその後の運動は、重心速度を $v(t)$、重心まわりの角速度を $\omega(t)$ とすると、次の運動方程式によって記述される。

$$M\frac{dv}{dt} = -\mu Mg \tag{3–78}$$

$$I_0\frac{d\omega}{dt} = a\mu Mg \tag{3–79}$$

したがって重心速度は次第に遅くなり、角速度は大きくなる。

$$v(t) = v_0 - \mu gt \tag{3–80}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{5\mu g}{2a} t \tag{3–81}$$

ただし $v = a\omega$ となった瞬間に摩擦力は作用しなくなり、その後は滑りなく一定の速さで転がっていく。そうなるまでの時間 t_c とその後の速さ v_c はそれぞれ次式で与えられる。

$$t_c = \frac{2}{7}\frac{v_0 - a\omega_0}{\mu g} = \left(1 - \frac{5h}{7a}\right)\frac{v_0}{\mu g} \tag{3–82}$$

$$v_c = \frac{5h}{7a} v_0 \tag{3–83}$$

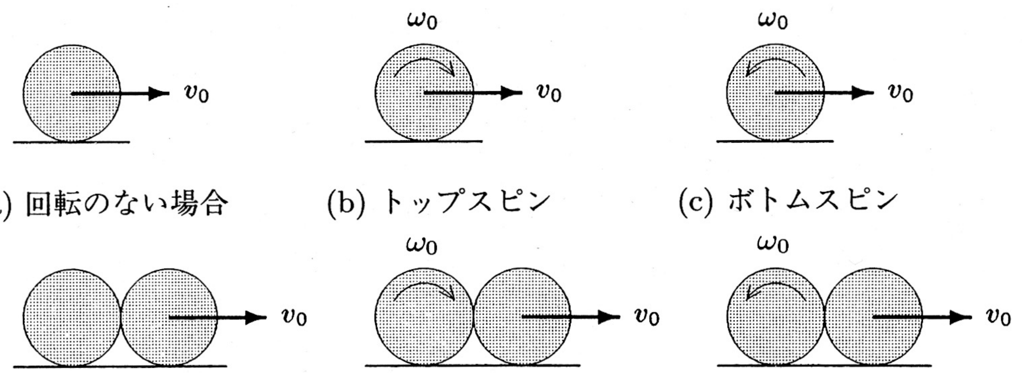

図 3 – 25:

特に $h = a$ のときは球は回転なしに滑り出す。このとき、滑りなく転がるようになったときの重心の移動速度は、はじめの速さの 5/7 である。

3. $h > 7a/5$ の場合：$v_1 < 0$ なので上の場合とは逆向きに滑りを生じる。球は $+x$ 方向に摩擦力を受けるので、v は次第に速く、ω は小さくなり、$v = a\omega$ が成り立った後は一定の速さで転がっていく。

このようにボールなどの運動の初期には「滑り」がよく起きる。滑走路に着陸する飛行機の車輪は、はじめは回転していないから、着地の際には滑りがあるはずである。ボーリングのボールをはじめから滑りのない転がりを起こすには初速度に合わせた適切な回転を与えなければならない。

問　図面の $h > 7a/5$ の場合に $v(t)$、$\omega(t)$ を求めよ。

補足：回転を考慮した球の衝突　簡単のために水平な床の上に静止している球Bに、半径と質量の同じ球Aが弾性衝突する場合を考える。床と球の間には摩擦があるが、２つの球の間の摩擦は考えないことにする。衝突直前の球Aの中心の速さを v_0、回転の角速度を ω_0 とする。

1. 衝突するとき球Aが回転していない場合（$\omega_0 = 0$)。球Aは静止し、球Bは速さ v_0 で回転なしに動き始める（図参照)。床との間の滑りによって受ける動摩擦力のために、やがて滑りなく転がるようになる。このときの中心の移動速度は $5v_0/7$ である。

2. 球Aがトップスピン（図の向きの回転）をもっている場合（$\omega_0 > 0$)。例えば球Aが滑りなく転がって来て衝突する場合である。衝突によって球Aは重心運動のエネルギーを失い、一瞬止まる。しかし中心のまわりの球Aの角運動量は

衝突によって変化しないから回転は依然として続く。このため床との間に滑りが生じ、摩擦力が前方向へ働き、球Aは再び前方向へ動きだす。球Aが滑りなく転がるようになったときの移動速度は $2a\omega_0/7$ である。一方球Bの運動は1.の場合と同じである。

3. 球Aがボトムスピン（図の向きの回転）をもっている場合（$\omega_0 < 0$）。この場合には衝突後、球Aは後方へ動きだす。球Bの運動は1.の場合と同じである。

補足：カーブして転がるボール　ボーリングのボールに後ろから見て時計まわりの回転を与えて投げ出すと、床から右向きの摩擦力を受けるのでボールは右へカーブする。

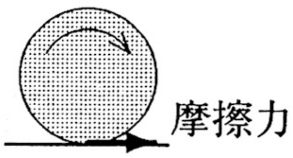

図 3 – 26:

3.9　こまの歳差運動

3.9.1　こまとは

こま［top］はその回転軸に関して対称な質量分布をしている回転体（剛体）である。軸に関する慣性モーメントが I で、そのまわりに角速度 $\boldsymbol{n}$ で回転している外力がはたらいていないこまは

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{n} \tag{3–84}$$

の角運動量をもっていて、これが一定に保たれる。すなわち、軸の方向は空間に保持される。ところで、これに外力のモーメント $\boldsymbol{N}$ を作用させて軸の方向を図 (3-27) のように角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で変えることを考えよう。$\boldsymbol{\omega}$ による $\boldsymbol{L}$ の変化は、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} \tag{3–85}$$

剛体についての運動方程式は、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} \tag{3–86}$$

であるから、式 (3-85) と式 (3-86) から

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} \tag{3–87}$$

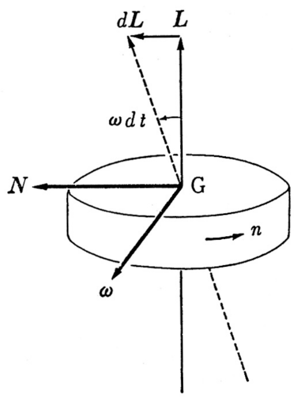

図 3 – 27:

が導きだせる。つまり回転軸を変化するのに必要な外力モーメント $\boldsymbol{N}$ の大きさがわかった。すなわち、図 (3-27) のように $\boldsymbol{N}$ の方向は $d\boldsymbol{L}$ のそれと一致し、大きさは $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{L}$ とが直角をなし、式 (3-84) から

$$N = \omega I n \tag{3–88}$$

となる。もっとわかりやすく表わすと図 (3-28) のとおりで、たとえば、重心 G の固定されたこまの軸頭（$\boldsymbol{L}$ ベクトルの軸の先端をこのように呼ぶ）に図のように力を加えると、軸頭はその向きに動かないで、図のようにそれと直角方向に動く。なお、I や n が大きいと、N が作用しても軸の方向が変わる度合の ω は小さい。

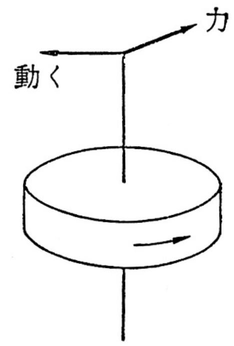

図 3 – 28:

3.9.2 重力によるこまの歳差運動

こまを地上で回わすとき、図 (3-29) のように軸の下端 O が地面に着いて固定され、軸の下端は鋭くて、地面とは一点で接するものとする。図に示すように軸は鉛直に対して θ だけ傾いているとする。こまに外部からはたらく力は、重力 Mg と O における地面からの抗力 R である。こまを引き倒そうとする重力のモーメントは O に関して

$$N = Mgh \sin\theta \tag{3–89}$$

である。ここで h は O から重心（G とする）に至る距離ベクトルである。

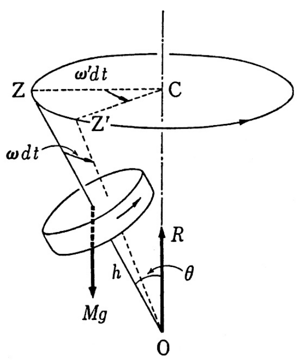

図 3 – 29:

この N のために、こまは倒れそうであるが、軸頭は水平に $\overrightarrow{\mathrm{ZZ'}}$ へと動き、結局 O を通る鉛直線上の一点 C を中心とし CZ を半径とする水平な円を描くことになる。ここでは、この円を描く角速度を ω' とし、軸の方向の変わる角速度 ω との関係をしらべてみる。図 (3-25) より

$$\begin{aligned} \mathrm{ZZ'} &= \mathrm{OZ}\,\omega dt \\ &= \mathrm{CZ}\,\omega' dt = \mathrm{OZ}\,\sin\theta \cdot \omega' dt \end{aligned}$$

よって

$$\omega = \omega' \sin\theta \tag{3–90}$$

となる。式 (3-89) と式 (3-90) を式 (3-88) に代入すると、

$$\omega' = \frac{Mgh}{In} \tag{3–91}$$

が得られる。このような運動をこまの**歳差運動**［precession］とよび、歳差運動の周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi In}{Mgh} \tag{3–92}$$

である。

例題　回転しているこまの上端が水平面内で等速円運動をする場合、こまの角運動量 $\boldsymbol{L}$ は図 (3-30(a)) の矢印の向きであることを確認せよ。こまにはたらく外力のモーメント $\boldsymbol{N}$ の向きを調べ、$\Delta \boldsymbol{L} = \boldsymbol{N} \Delta t$ の向きから、図 (3-30(b)) のようにこまの上端は水平面内で上から見ると時計の針と反対向きに等速円運動を行うことを示せ。

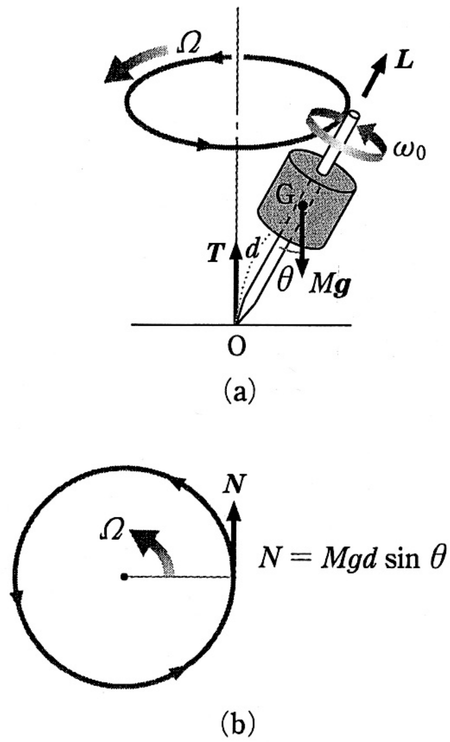

図 3 − 30: