令和８年度　大学院 理学研究科　入学試験

物 質 科 学 専 攻　　専 門 科 目

出題意図と略解

数学 第１問

出題意図：線型代数についての基本的な概念を問う．

(1) $a \neq 1$ かつ $b = 2$.

(2) $a - b \neq -2$.

(3) $a - b \neq -2$ または $(a, b) = (4, 6)$.

数学 第２問

出題意図：群についての基本的な概念を問う．

(1) $a, b \in N(S)$ とする． $s \in S$ とする．このとき $bs = t_1 b$ を満たす $t_1 \in S$ が存在する．よって $at_1 = t_2 a$ を満たす $t_2 \in S$ が存在する．すると $(ab)s = t_2(ab)$. 同様にして $s(ab) = (ab)u$ を満たす $u \in S$ の存在も分かる．

(2) 前問 (1) より $a \in N(S)$ ならば $a^{-1} \in N(S)$ であることを示せばよい．$a \in N(S)$, $s \in S$ とする．このとき $as = ta$, $sa = au$ を満たす $t, u \in N(S)$ が存在する．すると $a^{-1}s = ua^{-1}$, $sa^{-1} = a^{-1}t$.

(3) まず $H \subset N(H)$ を示す． $h \in H$, $s \in H$ とする． ここで $t = hsh^{-1}$, $u = h^{-1}sh$ とおくと $t, u \in H$ で $hs = th$, $sh = hu$. よって $h \in N(H)$. 次に正規性は, $h \in H$, $a \in N(H)$ としたとき $ah = ta$ を満たす $t \in H$ が存在するから $aha^{-1} = t \in H$ となることで分かる．

数学 第３問

出題意図：内積空間についての基本的な概念を問う．

(1) $\langle \alpha x + y,\, \alpha x + y \rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle + \langle \alpha x, y\rangle + \langle y, \alpha x\rangle + \langle y, y\rangle = |\alpha|^2\|x\|^2 + \langle \alpha x, y\rangle + \overline{\langle \alpha x, y\rangle} + \|y\|^2$ と $\langle \alpha x, y\rangle + \overline{\langle \alpha x, y\rangle} = 2\,\mathrm{Re}\langle \alpha x, y\rangle = 2\,\mathrm{Re}\bigl(\alpha\langle x, y\rangle\bigr)$ より．

(2) $\langle x, y\rangle \neq 0$ としてよい． このとき $\|x\| \neq 0$. 前問 (1) で $\alpha = t\,\overline{\langle x, y\rangle}$ $(t \in \mathbb{R})$ とすると $0 \leq \langle \alpha x + y,\, \alpha x + y\rangle = |\langle x, y\rangle|^2\|x\|^2t^2 + 2|\langle x, y\rangle|^2 t + \|y\|^2$. ここで実数 t の任意性に注意すればよい．

(3) 前問 (2) より特に $\mathrm{Re}\bigl(\langle x, y\rangle\bigr) \leq |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. この不等式を前問 (1) で $\alpha = 1$ としたものに適用すると $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\bigl(\langle x, y\rangle\bigr) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \bigl(\|x\| + \|y\|\bigr)^2$.

(4) 前問 (2), (3) より $|\langle x_k, y_k\rangle - \langle x, y\rangle| \leq |\langle x_k, y_k - y\rangle| + |\langle x_k - x, y\rangle| \leq \|x_k\|\|y_k - y\| + \|x_k - x\|\|y\| \leq \bigl(\|x_k - x\| + \|x\|\bigr)\|y_k - y\| + \|x_k - x\|\|y\|$. 後は $k \to \infty$ とすればよい．