令和８年度　大学院　理学研究科　入学試験

物質科学専攻　専門科目

情報第１問の解答例

問１

(1)

極座標表示(r, θ, ϕ)に変換すると、

$$x = r\sin\theta\cos\phi\,,$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi\,,$$
$$z = r\cos\theta$$
$$dxdydz = r^2\sin\theta\, drd\theta d\phi$$
$$\sqrt{x^2+y^2} = r\sin\theta$$

となり、積分範囲は$0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \phi \le 2\pi$となる。

よって、

$$\iiint \sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} r\sin\theta \cdot r^2\sin\theta\, drd\theta d\phi$$
$$= \int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} r^3\sin^2\theta\, drd\theta d\phi$$
$$= \int_0^1 r^3 dr\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} d\phi$$
$$= \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}[\phi]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{\pi^2}{8}$$

(2)

ストークスの定理より、

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{dr} = \iint_S \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{n}$$

ここで、曲面Sは$x^2+y^2+z^2=1,\ z \ge 0$の半球表面であり、曲線Cを境界としている。$\boldsymbol{n}$はその半球面の法線ベクトルであり、向きは動径方向に対して正とする。

$\nabla\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$となるので、$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{dr} = 0$

（別解）

積分領域Cを円周の座標(r,θ)に変換すると，$r=1$なので、

$$
\begin{aligned}
x &= \cos\theta\,, \\
y &= \sin\theta\,, \\
\boldsymbol{F} &= (\cos^2\theta\,, \sin^2\theta), \\
\boldsymbol{dr} &= (-\sin\theta\, d\theta, \cos\theta\, d\theta),
\end{aligned}
$$

となり、積分範囲は $0\leq\theta\leq 2\pi$となる。
よって、

$$
\begin{aligned}
\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{dr} &= \int_0^{2\pi}\left(\cos^2\theta\,,\sin^2\theta\right)\cdot(-\sin\theta\, d\theta, \cos\theta\, d\theta) \\
&= \int_0^{2\pi}\left(-\sin\theta\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos\theta\right)d\theta \\
&= \left[\frac{\cos^3\theta}{3}+\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

<u>問 2</u>
(1)
微分方程式から$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$となる。
Aの固有値をλ、固有ベクトルを$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}$とする。
特性方程式は

$$
\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+1)(\lambda+3)=0
$$

となるので、固有値は$\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=-3$。
$\lambda_1=0$のときは連立方程式

$$
\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}
$$

に従うので、規格化した固有ベクトルは$\boldsymbol{v_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$となる。

$\lambda_2 = -1$のときも同様にして、規格化した固有ベクトル$\boldsymbol{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$が得られる。

$\lambda_3 = -3$のときも同様にして、規格化した固有ベクトル$\boldsymbol{v_3} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$が得られる。

(2)

$\boldsymbol{x}(t) = f_1(t)\boldsymbol{v}_1 + f_2(t)\boldsymbol{v}_2 + f_3(t)\boldsymbol{v}_3$を二階時間微分すると、

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \ddot{f}_1(t)\boldsymbol{v}_1 + \ddot{f}_2(t)\boldsymbol{v}_2 + \ddot{f}_3(t)\boldsymbol{v}_3$$

また、

$$\begin{aligned} kA\boldsymbol{x} &= kf_1(t)A\boldsymbol{v}_1 + kf_2(t)A\boldsymbol{v}_2 + kf_3(t)A\boldsymbol{v}_3 \\ &= kf_1(t)\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + kf_2(t)\lambda_2\boldsymbol{v}_2 + kf_3(t)\lambda_3\boldsymbol{v}_3 \\ &= -kf_2(t)\boldsymbol{v}_2 - 3kf_3(t)\boldsymbol{v}_3 \end{aligned}$$

$\ddot{\boldsymbol{x}} = kA\boldsymbol{x}$を満たすためには両辺で$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$の係数が等しくなる必要がある。

よって、

$$\begin{aligned} &\ddot{f}_1(t) = 0, \\ &\ddot{f}_2(t) = -kf_2(t), \\ &\ddot{f}_3(t) = -3kf_3(t) \end{aligned}$$

(3)

$f_1(t), f_2(t), f_3(t)$の一般解を求めると、

$$\begin{aligned} &f_1(t) = C_1 t + C_2, \\ &f_2(t) = C_3 e^{-i\sqrt{k}t} + C_4 e^{i\sqrt{k}t}, \\ &f_3(t) = C_5 e^{-i\sqrt{3k}t} + C_6 e^{i\sqrt{3k}t} \end{aligned}$$

ただし、$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$は定数。

よって、

$$\boldsymbol{x}(t) = (C_1 t + C_2)\boldsymbol{v}_1 + \left(C_3 e^{-i\sqrt{k}t} + C_4 e^{i\sqrt{k}t}\right)\boldsymbol{v}_2 + \left(C_5 e^{-i\sqrt{3k}t} + C_6 e^{i\sqrt{3k}t}\right)\boldsymbol{v}_3$$

問3

(1)

$$\begin{aligned} p(x_1, s) &= p(x_1, x_2 = s - x_1) \\ &= p(x_1)p(s - x_1) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(s-x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x_1-\mu)^2+(s-x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

一行目から二行目の式変形に乱数生成が互いに独立であることを用いた。

(2)

(1)より

$$p(s) = \int p(x_1, s)dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x_1-\mu)^2+(s-x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx_1$$

指数関数の中身をx_1について平方完成すると、

$$-\frac{(x_1-\mu)^2+(s-x_1-\mu)^2}{2\sigma^2} = -\frac{\left(x_1-\frac{s}{2}\right)^2}{\sigma^2} - \frac{(s-2\mu)^2}{4\sigma^2}$$

よって、

$$p(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{\left(x_1-\frac{s}{2}\right)^2}{\sigma^2} - \frac{(s-2\mu)^2}{4\sigma^2}\right] dx_1$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(s-2\mu)^2}{4\sigma^2}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\left(x_1-\frac{s}{2}\right)^2}{\sigma^2}\right] dx_1$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(s-2\mu)^2}{4\sigma^2}\right]$$

ここで、$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\left(x_1-\frac{s}{2}\right)^2}{\sigma^2}\right] dx_1 = \sqrt{\pi\sigma^2}$を用いた。

$p(s)$がガウス分布になっていることから、その平均は2μ、分散は$2\sigma^2$である。

(3)

(1)と(2)より、

$$p(x_1 \mid s) = \frac{p(x_1, s)}{p(s)}$$

$$
= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{\left(x_1-\frac{s}{2}\right)^2}{\sigma^2}-\frac{(s-2\mu)^2}{4\sigma^2}\right]}{\frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(s-2\mu)^2}{4\sigma^2}\right]}
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{\left(x_1-\frac{s}{2}\right)^2}{\sigma^2}\right]
$$

$p(x_1 \mid s)$がガウス分布になっていることから、その平均は$\frac{s}{2}$、分散は$\frac{\sigma^2}{2}$である。