物理第１問

出題意図：電気学分野における基本法則を応用する力、計算力、物理的考察能力を問う。

問１ Q と q の距離を r_+ とすると，電気双極子にはたらく力 F は，

$$F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(r_+)^2} - \frac{1}{(r_+ + |\boldsymbol{d}|)^2}\right\}$$

となり，Q から離れる向きに力がはたらく。

問２

(1) $-q$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_-$ とする。

$$U = -(-q)\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}_- - q\boldsymbol{E}_0\cdot(\boldsymbol{r}_- + \boldsymbol{d}) = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_0$$

(2) (a): $$U_{(\mathrm{a})} = -pE_0,$$
(b): $$U_{(\mathrm{b})} = pE_0$$
$$\Delta U = U_{(\mathrm{b})} - U_{(\mathrm{a})} = 2pE_0$$
（ΔU として $U_{(\mathrm{a})} - U_{(\mathrm{b})}$ を考えても構わない。）

(3)
$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{d}\times q\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}_0$$
$$\text{求める仕事} = \int_0^{\pi} N d\theta = \int_0^{\pi}(pE_0\sin\theta)\,d\theta = 2pE_0$$
(2) より $\Delta U = 2pE_0$ であり，等しい。

問３

(1)
$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\boldsymbol{r}\mp\frac{1}{2}\boldsymbol{d}|} &= \frac{1}{\{(\boldsymbol{r}\mp\frac{1}{2}\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{r}\mp\frac{1}{2}\boldsymbol{d})\}^{1/2}} \\
&= \frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\left(1\mp\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{r}^2}+\frac{\boldsymbol{d}^2}{4\boldsymbol{r}^2}\right)^{-1/2} \\
&\approx \frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\left(1\pm\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d}}{2\boldsymbol{r}^2}\right)
\end{aligned}$$

を用いて，
$$\begin{aligned}
\phi_0(\boldsymbol{r}) &\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\left\{\left(1+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d}}{2\boldsymbol{r}^2}\right)-\left(1-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d}}{2\boldsymbol{r}^2}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}
\end{aligned}$$

(2) 導体表面では，電場がゼロでなければ伝導電子が力を受けて移動し、その電荷分布の変化は電場が消えるまで続く。従って，電場を $\boldsymbol{E}$，静電ポテンシャルを ϕ とすると，$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ の関係より，ϕ は一定値をとる。
電場は，導体表面に垂直に交わるという特徴を持つ。

(3) $\boldsymbol{r}^{\pm} = (x \mp a, y, z)$，$\boldsymbol{p} = (p, 0, 0)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y,z) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}^{+}}{|\boldsymbol{r}^{+}|^3} + \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}^{-}}{|\boldsymbol{r}^{-}|^3}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{p(x-a)}{\left\{(x-a)^2+y^2+z^2\right\}^{3/2}} + \frac{p(x+a)}{\left\{(x+a)^2+y^2+z^2\right\}^{3/2}}\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，$x = 0$ とすると，$\phi(0, y, z) = 0$。
従って，導体板表面では（y，z にかかわらず）静電ポテンシャルは一定となり，**問 3(2)** の条件を満たす。

(4) $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{2(x-a)^2-y^2-z^2}{\left\{(x-a)^2+y^2+z^2\right\}^{5/2}} + \frac{2(x+a)^2-y^2-z^2}{\left\{(x+a)^2+y^2+z^2\right\}^{5/2}}\right\} \\
E_y &= -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{3py}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x-a}{\left\{(x-a)^2+y^2+z^2\right\}^{5/2}} + \frac{x+a}{\left\{(x+a)^2+y^2+z^2\right\}^{5/2}}\right\} \\
E_z &= -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{3pz}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x-a}{\left\{(x-a)^2+y^2+z^2\right\}^{5/2}} + \frac{x+a}{\left\{(x+a)^2+y^2+z^2\right\}^{5/2}}\right\}
\end{aligned}
$$

$x = 0$ の領域では $E_y = E_z = 0$ となるため，電場は導体表面に垂直に交わるという**問 3(2)** の特徴を満たしている。

(5)
$$
\sigma\left(0, y, z\right) = \varepsilon_0 E_x(0, y, z) = \frac{p}{2\pi}\frac{2a^2-y^2-z^2}{\left(a^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}
$$

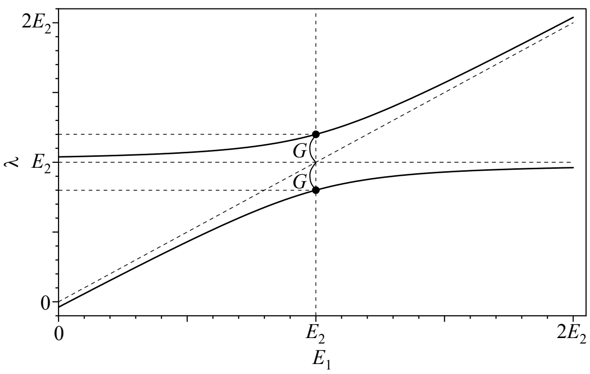
物理第２問

出題意図：量子力学の分野において、演算子を用いた計算および行列計算を行える能力を問う。

問１

$$\lambda = \frac{E_1 + E_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{E_1 - E_2}{2}\right)^2 + G^2}$$

問２



問３

$$|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

,

$$|\phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

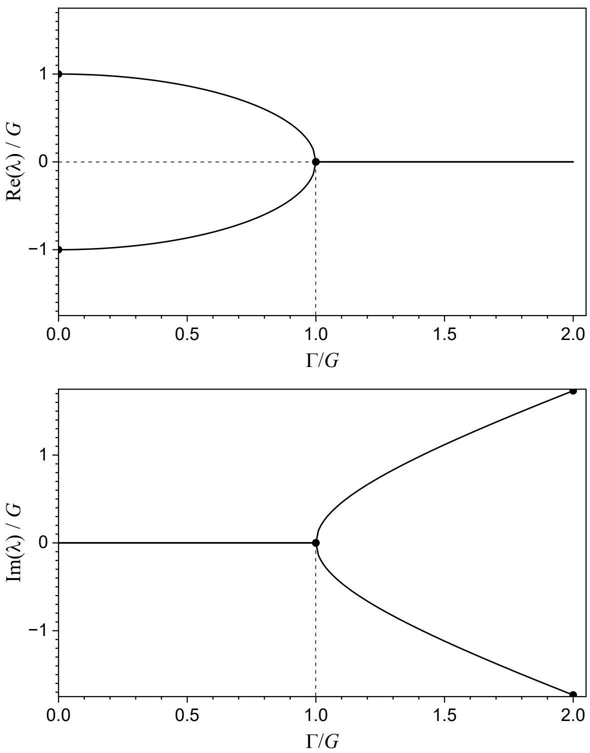
問４

$$\phi_1 = a\exp\left(-i\frac{E_1}{\hbar} - \frac{\Gamma_1}{\hbar}\right)t$$

問５

$$\lambda = \pm\sqrt{G^2 - \Gamma^2}$$

問６



問 7

$$|\phi_{\mathrm{E}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

問 8

$$|\phi_{\mathrm{G}}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

,

$$|\phi_{\mathrm{L}}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問 9

$$\langle\phi_+|J|\phi_+\rangle = 0, \quad \langle\phi_-|J|\phi_-\rangle = 0, \quad \langle\phi_{\mathrm{E}}|J|\phi_{\mathrm{E}}\rangle = -\frac{G}{\hbar},$$
$$\langle\phi_{\mathrm{G}}|J|\phi_{\mathrm{G}}\rangle = 0, \quad \langle\phi_{\mathrm{L}}|J|\phi_{\mathrm{L}}\rangle = 0.$$

問 10

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\phi|\phi\rangle = \frac{2\Gamma}{\hbar}(|a|^2 - |b|^2)$$

物理第３問

出題意図：統計力学分野における、熱力学的平衡状態に関する基本的な概念と計算力を問う。

問１

(1) 系全体のエネルギーは

$$E \;=\; \mu_{\mathrm{B}} H (N - 2N_1)$$

(2) 可能な状態数は

$$W = \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!}$$

(3) エントロピーは

$$S \;=\; k_{\mathrm{B}} \left[N \log N - N_1 \log N_1 - (N - N_1) \log(N - N_1) \right]$$

(4) エネルギーと温度の関係は

$$E \;=\; -\mu_{\mathrm{B}} H N \tanh\left(\frac{\mu_{\mathrm{B}} H}{k_{\mathrm{B}} T}\right)$$

問２

(1) N 個の系の分配関数は

$$Z_N = \left(\frac{\sinh\left(2\beta\mu_{\mathrm{B}} H (S + \frac{1}{2})\right)}{\sinh\left(\beta\mu_{\mathrm{B}} H\right)} \right)^N$$

(2) スピン１個当たりの磁化は

$$m = 2\mu_{\mathrm{B}} \left[(S + \frac{1}{2}) \coth\left(2\beta\mu_{\mathrm{B}} H (S + \frac{1}{2})\right) - \frac{1}{2} \coth\left(\beta\mu_{\mathrm{B}} H\right) \right]$$

(3) m と H の比の極限値は

$$\lim_{H\to 0} \frac{m}{H} = \frac{4}{3} \beta \mu_{\mathrm{B}}^2 S(S+1)$$