

物質科学専攻 専門科目

出題意図と略解

数学 第1問

出題意図：ベクトル空間, 1 変数関数の微分積分についての基本的な計算能力を問う.

$$(1) \begin{pmatrix} -u & 0 & -v & 0 \\ u & u-v & u & 0 \\ -v & 0 & -u & 0 \\ v & v & u+v & u+v \end{pmatrix}$$

$$(2) 3, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ またはその零でない実数倍}$$

$$(3) \frac{1}{4} \log \left| \frac{u+1}{u-1} \right| - \frac{1}{4(u-1)} - \frac{1}{4(u+1)} + C, C \text{ は積分定数}$$

数学 第2問

出題意図：群についての基本的な概念を問う.

(1) 任意の $a, b \in G$ に対して, $f(ab) = f(a)f(b)$ が成り立つ.

(2) $ee = e$ より, $f(e) = f(ee) = f(e)f(e)$ なので $f(e) = e'$ である.

(3) $f(a), f(b) \in f(H)$ とすると, $f(a)(f(b))^{-1} = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1}) \in f(H)$ であるので $f(H)$ は G' の部分群である.

数学 第3問

出題意図：Hilbert 空間についての基本的な概念を問う.

$$(1) \sqrt{2}$$

$$(2) 0 \leq \left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{l=1}^n |\alpha_l|^2 \text{ より, } \sum_{l=1}^n |\alpha_l|^2 \leq \|x\|^2 \text{ であるので, } n \rightarrow \infty \text{ として}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} |\alpha_l|^2 \leq \|x\|^2 \text{ となる.}$$

(3) (2) より任意の $x \in X$ に対して $k \rightarrow \infty$ のとき $(x, x_k) \rightarrow 0$ となるので, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ は弱収束する.

(1) より $\|x_k - x_m\| = \sqrt{2}$ だから $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ は強収束しない.