

物理第1問

出題意図：電磁気学分野における基本法則を応用する力、計算力、物理的考察能力を問う。

問1

- | | |
|---|---|
| 1 | ρ |
| 2 | $\nabla \times \boldsymbol{B}$ |
| 3 | $\boldsymbol{j}$ |
| 4 | $\sigma \boldsymbol{E}$ |
| 5 | $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ |
| 6 | $\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$ |
| 7 | $\varepsilon \mu$ |
| 8 | $\sigma \mu$ |

問2

$$\gamma^2 = -\varepsilon \mu \omega^2 - i \sigma \mu \omega$$

問3

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left(\frac{\sqrt{1 + (\sigma / \omega \varepsilon)^2} - 1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\beta = -\omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left(\frac{\sqrt{1 + (\sigma / \omega \varepsilon)^2} + 1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

問4 金属表面からの距離は、

$$\sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

問5 温度を下げると、電気伝導率 σ が大きくなるため、電磁波が金属に侵入する長さは小さくなる。

物理第2問

出題意図：量子力学の分野において、演算子を用いた計算 および 行列計算を行える能力を問う。

問1

$$\begin{aligned}
 \hat{l}_x &= \frac{1}{2} (\hat{l}_+ + \hat{l}_-) \cdot \hat{l}_y = \frac{1}{2i} (\hat{l}_+ - \hat{l}_-) \\
 \hat{s}_x &= \frac{1}{2} (\hat{s}_+ + \hat{s}_-) \cdot \hat{s}_y = \frac{1}{2i} (\hat{s}_+ - \hat{s}_-) \\
 \hat{l}_x \hat{s}_x + \hat{l}_y \hat{s}_y &= \frac{1}{4} (\hat{l}_+ + \hat{l}_-) (\hat{s}_+ + \hat{s}_-) - \frac{1}{4} (\hat{l}_+ - \hat{l}_-) (\hat{s}_+ - \hat{s}_-) \\
 &= \frac{1}{2} (\hat{l}_+ \hat{s}_- + \hat{l}_- \hat{s}_+)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \zeta (\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) &= \zeta (\hat{l}_x \hat{s}_x + \hat{l}_y \hat{s}_y + \hat{l}_z \hat{s}_z) \\
 &= \frac{1}{2} \zeta (\hat{l}_+ \hat{s}_- + \hat{l}_- \hat{s}_+) + \zeta \hat{l}_z \hat{s}_z
 \end{aligned}$$

問2

$$\hat{s}_+ \alpha = 0, \quad \hat{s}_+ \beta = \hbar \alpha, \quad \hat{s}_- \alpha = \hbar \beta, \quad \hat{s}_- \beta = 0, \quad \hat{s}_z \alpha = \frac{\hbar}{2} \alpha, \quad \hat{s}_z \beta = -\frac{\hbar}{2} \beta$$

問3

$$\begin{aligned}
 \zeta (\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) u_{1\alpha} &= \frac{1}{2} \hbar^2 \zeta u_{1\alpha} \\
 \zeta (\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) u_{1\beta} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \hbar^2 \zeta u_{0\alpha} - \frac{1}{2} \hbar^2 \zeta u_{1\beta} \\
 \zeta (\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) u_{0\alpha} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \hbar^2 \zeta u_{1\beta} \\
 \zeta (\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) u_{0\beta} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \hbar^2 \zeta u_{-1\alpha} \\
 \zeta (\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) u_{-1\alpha} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \hbar^2 \zeta u_{0\beta} - \frac{1}{2} \hbar^2 \zeta u_{-1\alpha} \\
 \zeta (\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) u_{-1\beta} &= \frac{1}{2} \hbar^2 \zeta u_{-1\beta}
 \end{aligned}$$

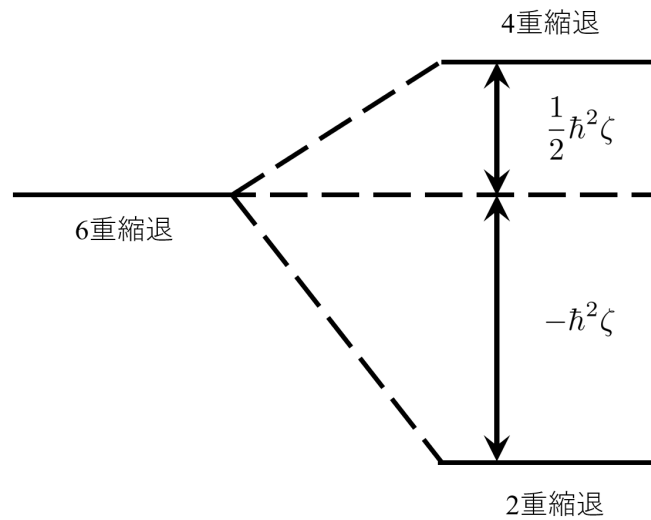
問 4

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hbar^2\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar^2\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar^2\zeta & -\frac{1}{2}\hbar^2\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\hbar^2\zeta & \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar^2\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar^2\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\hbar^2\zeta \end{pmatrix}$$

問 5 固有値は、

$$-\hbar^2\zeta, \quad \frac{1}{2}\hbar^2\zeta$$

問 6 p 軌道状態に対して 6 重縮退であったところ、スピン・軌道相互作用により、固有値 $-\hbar^2\zeta$ の状態が 2 重縮退、 $\frac{1}{2}\hbar^2\zeta$ の状態が 4 重縮退となる。略図は下図のようになる。



物理第3問

出題意図：統計力学分野における、熱力学的平衡状態に関する基本的な概念と、計算力を問う。

問1 (1) n_l に関する和を独立に取ることで、

$$\begin{aligned}\Xi &= \sum_{n_0=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \sum_{l=0}^{\infty} (\varepsilon_l - \mu) n_l \right] \\ &= \prod_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n_l=0}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{k_B T} (\varepsilon_l - \mu) n_l \right] \right\} \\ &= \prod_{l=0}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{(\mu - \varepsilon_l)/(k_B T)}}\end{aligned}$$

(2) $\beta = \frac{1}{k_B T}$ とする。 $P_{N, \{n_l\}}$ の表式を用いて、

$$\begin{aligned}\bar{n}_l &= \frac{1}{\Xi} \left\{ \sum_{n_l=0}^{\infty} n_l \exp [-\beta \{ \varepsilon_l - \mu \} n_l] \right\} \prod_{i \neq l} \left\{ \sum_{n_i=0}^{\infty} \exp [-\beta (\varepsilon_i - \mu) n_i] \right\} \\ &= (1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_l)}) \frac{1}{\mu - \varepsilon_l} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_l)}} \right) \\ &= (1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_l)}) \frac{1}{\mu - \varepsilon_l} \frac{e^{\beta(\mu - \varepsilon_l)}}{(1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_l)})^2} \\ &= \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_l - \mu)} - 1} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_l - \mu)/(k_B T)} - 1}\end{aligned}$$

(3) μ が満たすべき条件は、

$$\mu < \varepsilon_0$$

(4) U の表式は、

$$U = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l \bar{n}_l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{\exp(\varepsilon_l - \mu)/(k_B T) - 1}$$

(5) P の表式は、

$$P = -\frac{k_B T}{V} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \log \left(1 - e^{(\mu - \varepsilon_l)/(k_B T)} \right) \right\}$$

問2 (1) 周期 τ と角振動数 ω は、

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(2) ε_l は、

$$\varepsilon_l = \hbar \sqrt{\frac{k}{m}} \left(l + \frac{1}{2} \right)$$

(3) N_{ex} は、

$$N_{\text{ex}} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{e^{(l\varepsilon_{\min} + \varepsilon_0 - \mu)/(k_B T)} - 1}$$

(4) N_{ex} の近似式は、

$$N_{\text{ex}} \simeq \frac{k_B T}{\varepsilon_{\min}} \ln \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_{\min}} \right)$$