

博士論文審査報告書

論文題目： パウリ作用素のゼロ・モード、ゼロ・レゾナンス

申請者： 森田 務

1. 論文内容の要旨

パウリ作用素は $P_A = \sum_{j=1}^3 \{(D_j - A_j)^2\} - \sigma \cdot B$ によって定義される2階の偏微分作用素である。ここで $D = -i\nabla_x$, $A = (A_1, A_2, A_3)$ はベクトル・ポテンシャル, $B = \text{rot } A$ であり, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ はパウリ行列である。パウリ作用素はワイル・ディラック作用素 $D_A = \sigma \cdot (D - A)$ を用いて形式的に $P_A = \{\sigma \cdot (D - A(x))\}^2 = D_A^2$ と表される。即ち, $A_j \in C^1$ のとき, $(D_A\psi, D_A\varphi)_{\mathcal{L}^2} = (P_A\psi, \varphi)_{\mathcal{L}^2}$ ($\psi, \varphi \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^3)]^2$) が成り立つ。ここで \mathcal{L}^2 は2乗可積分な関数のつくる空間 L^2 のコピー2つの直積として定義されるヒルベルト空間である。 A_j が \mathbb{R}^3 全体で有界可測ならば, D_A は \mathcal{L}^2 で自己共役作用素となり、その定義域は1階ソボレフ空間のコピー2つの直積として定義される部分空間 \mathcal{H}^1 である。また、 $A_j, \nabla A_j$ が \mathbb{R}^3 全体で有界連続ならば, P_A は $[C_0^\infty(\mathbb{R}^3)]^2$ 上 \mathcal{L}^2 で本質的に自己共役であり、その自己共役実現の定義域は2階ソボレフ空間から定義される \mathcal{H}^2 になる。

自己共役作用素としてのパウリ作用素の核の元 $\psi \in \text{Ker}(P_A)$ であって、自明でないものをゼロ・モードと呼ぶ。超関数の意味で $P_A\psi = 0$ を満たす関数 ψ で、 \mathcal{L}^2 より少し大きい空間に属するが、 \mathcal{L}^2 には属さないものをゼロ・レゾナンスと呼ぶ。

A_j が可測関数であって、 $|A_j(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\rho}$ ($\rho > 1$) が成り立つならば、 $q_A(\varphi, \psi) = (D_A\varphi, D_A\psi)_{\mathcal{L}^2}$, ($\varphi, \psi \in \mathcal{H}^1$) はヒルベルト空間 \mathcal{L}^2 において非負かつ閉な2次形式となる。これにより一意的に定まる自己共役作用素 P_A に関して、 $\psi \in \text{Ker}(P_A)$ ならば必ず極限 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^2\psi(x)$ が存在することを示した。さらに、この極限をベクトル・ポテンシャル A とゼロ・モード ψ を用いて表現することに成功した。

$A_j \in C^\infty$ であって、 $|A_j(x)| + |\nabla A_j(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\rho}$ ($\rho \geq 2$) が成り立つならば、超関数の意味で $P_A\psi = 0$ を満たす $\psi \in \mathcal{H}^{1-s}$ ($0 < s \leq 1$) は実は2階ソボレフ空間 \mathcal{H}^2 に属すること、すなわち、自己共役作用素としての P_A の定義域に属することを示した。ここで \mathcal{H}^{1-s} は重みの付いた1階ソボレフ空間から定義されるヒルベルト空間である。この意味で、パウリ作用素はゼロ・レゾナンスを持たないことを示した。

リース・ポテンシャル、リース変換に関する新しい不等式を導き、これらを証明の中で用いた。また、重み付き L^2 空間のペアリングに関して新しい論法を考案し、証明の中で用いた。

2. 論文審査結果

パウリ作用素の数学的な性質は現今の活発な研究対象であるが、特に、パウリ作用素のゼロ・モード、ゼロ・レゾナンスの存在、非存在はスペクトル解析における根元的な重要問題に関わっており、大きな関心を集めている。現在までに、パウリ作用素のゼロ・モードを生起するベクトル・ポテンシャルの存在、生起されたゼロ・モードの関数形は知られているものの、ベクトル・ポテンシャルに対する一般的な仮定の下で、ゼロ・モードそのものの性質が研究されたことはなかった。申請者はゼロ・モードの無限遠方における漸近挙動を、ベクトル・ポテンシャルに対する一般的な仮定の下で完全に解明した。

また、ゼロ・レゾナンスに関して、申請者はベクトル・ポテンシャルに対する、やはり一般的な仮定の下で、パウリ作用素のゼロ・レゾナンスが存在しないことを示した。この結果は、スペクトル・パラメータがゼロの近傍にあるときのパウリ作用素のレゾルベント作用素の漸近挙動が、多くの研究者の予測より簡明な形になることを意味している。

以上に見たように、本論文はパウリ作用素のスペクトル解析に新しい知見をもたらすものである。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値のあるものと認める。

また、平成23年1月21日、論文内容およびこれに関連する事項について試問を行った結果、合格と判定した。

主査：榎田登美男

副査：岩崎千里

：保城寿彦

：田村英男

(岡山大学大学院自然科学研究科、教授)